Math. P.
373 n

Math. p.
393n

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

Bayerische Staatsbibliothek München

Gründliche Anweisung zur Rechenkunst

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

zum Gebrauch in Gymnasien und Bürgerschulen

von

Andreas Neubig

Doktor der Philosophie und Professor der Mathematik am Gymnasium zu Baireuth.

Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage.

Erlangen,
bei Carl Heyder
1823.
(Preis 4 gr. oder 18 kr. rheinisch.)

R
Wd.
235.a.

Die verehrlichen Lehrer in Volksschulen machen wir auf nachfolgende sehr gemeinnützige und äusserst wohlfeile Schulschriften aufmerksam, die so eben in neuen und verbesserten Auflagen erschienen sind, und die allen Schulen mit vollem Recht angelegentlichst empfohlen zu werden verdienen. Sie können durch Carl Heyder in Erlangen und durch alle Buchhandlungen Teutschlands und benachbarter Länder auf Bestellungen bezogen werden.

Neueste Geographie von Europa und den übrigen vier Welttheilen von Dr. Engelmann. 19te verb. Auflage. 8 Bogen stark und enger Druck. 8. 3 gr. oder 12 kr. Silbergeld.

Friedrich, W., neues Lehr- und Lesebuch für die deutschen Volksschulen aller Confessionen. 2te verb. Aufl. 12 Bog. stark. eng. Dr. 3 gr. oder 12 kr.

Pfaffs, Prof., Naturlehre für Bürger- und Volksschulen 10 Bogen. eng. Dr. 8. 3 gr. oder 12 kr.

Vollständige teutsche Sprachlehre für Schulen, von Dr. P. 2 Bogen eng. Dr. 8. 3 gr. oder 12 kr.

Die teutsche Geschichte für Schulen bearbeitet von Dr. P. 14 Bog. eng. Dr. 8. 3 gr. oder 12 kr.

Die allgemeine Weltgeschichte für Schulen bearbeitet von Prof. Zimmermann. 12 Bogen eng. Dr. 8. 3 gr. oder 12 kr.

Friedrich, Wilh. (Kantor u. Lehrer an der katholischen Gemeinde zu Erlangen) allgemeines Lesebuch für den Bürger und Landmann, vornehmlich zum Gebrauch in den katholischen Stadt- und Landschulen. 19te verb. Aufl. 40 Bog. stark, grof. Dr. 8. Preis 8 gr. od. 36 kr.

Vollständige Technologie. Zum Gebrauch in Schulen. 6te verb. Aufl. 12 Bogen. eng. Dr. 8. 4 gr oder 18 kr.

Kelber, J. G. Pfarrer, neues Lesebuch für die deutschen Volksschulen aller Confessionen. 12 Bogen, grof. Dr. 2te verb. Aufl. 8. 3 gr. oder 12 kr.

Seiler, Dr. G. F., allgemeines Lesebuch für die deutschen Stadt- und Landschulen. 19te verb. Aufl. 40 Bogen stark, grof. Dr. 8. Preis 8 gr. oder 36 kr.

— — die Religion der Unmündigen. 8. 20te verb. Aufl. 6 gr. oder 27 kr.

Schubert, Prof., Lehrbuch der Naturgeschichte, besonders zum Gebrauch in Schulen, 16 Bog. eng. Dr. 8. 6 gr. oder 27 kr.

Zugleich machen wir jeden Lehrer auf die „sämmtlichen Schul- und Volksschriften für Lehrer und Lernende" aufmerksam, die von Seiler und vielen andern Gelehrten in 45 Theilen herausgegeben worden sind, und die um einen fast unglaublich billigen Pränumerations-Preis verkauft werden, und von vielen teutschen Schulmännern bereits schon gekauft worden sind. Die Bibelanstalt in Erlangen ertheilt hierüber eine ausführliche Anzeige, die man auch auf Verlangen durch jede solide Buchhandlung in Teutschland unentgeldlich erhalten kann.

Vorrede
zur ersten Auflage.

Außer dem mannigfaltigen Nutzen, den die Rechenkunst im bürgerlichen Leben leistet, gewährt sie auch noch den großen Vortheil, daß sie ein treffliches Mittel zur formellen Bildung des Geistes abgibt. Dieß kann aber nur dadurch geschehen, daß der Schüler nicht blos die Regeln des Rechnens erlernt hat, sondern auch mit den Gründen oder Grundsätzen bekannt gemacht wird, auf welchen jene beruhen oder aus welchen sie fließen. Leider wird aber dieser Vortheil beim Unterrichte noch viel zu wenig beachtet; gewöhnlich lernt der Schüler nichts, als die blosen Regeln, die nur den Geist tödten, und wenn man ihn frägt, warum er bei dieser oder jener Rechnungsart gerade so und nicht anders verfährt, so weiß er nichts anders zu antworten, als: weil's so heraus kommt. Diesen Unfug unterhalten und verbreiten auch die meisten Rechenbücher, die man nämlich wegen ihrer Kürze und Wohlfeilheit beim Unterricht der Jugend zum Grunde legen könnte; denn sie enthalten gewöhnlich nur die nackten Regeln des

Rechnens. Wir besitzen zwar auch gründlich abgefaßte Rechenbücher; aber sie sind gemeiniglich zu weitläuftig und zu theuer, als daß man sie in öffentlichen Schulen, wo die Mehrzahl der Schüler arm oder minderbegütert ist, einführen könnte. Mein Lehramt verlangt nun durchaus, daß ich gründlichen Unterricht im Rechnen ertheile. Ich sah mich deßhalb veranlaßt, selbst ein kurzes und doch gründliches Rechenbuch auszuarbeiten; und ich wünsche nichts mehr, als daß es nicht nur in meiner Schule, sondern auch in andern den bezweckten Nutzen bringen möge. Man findet hier die im gemeinen Leben vorkommenden und nöthigen Rechnungsarten, mit Einschluß der Zinsrechnungs, nur daß sie nicht als eine besondere Rechnungsart aufgeführt ist; sie gehört zur Regel de tri, de quinque. Mehre Beispiele hinzu zu fügen, hielt ich für unnöthig, da jeder Lehrer ohnehin mit einer hinreichenden Anzahl derselben versehen sein wird.*) Die Reesische Regel sucht man hier vergebens; denn mit Recht nennt sie Kästner eine elende Kunst. Geschrieben zu Regensburg am Feste der Erlösung Teutschlands 1814.

*) Auf Verlangen ist gegenwärtig eine bedeutende Anzahl von Beispielen überall am rechten Orte beigegeben werden.
Anmerkung zur dritten Auflage.

Vorrede
zur zweiten Auflage.

Es ist gewiß keine geringe Empfehlung für dieses Büchlein, daß es, bei der Sündfluth von Rechenbüchern und ohne in den Buchladen gekommen zu sein, dennoch schon in dem kurzen Zeitraum von 4 Jahren eine neue Auflage erlebt hat. In der That dürfte man auch unter seinen vielen Brüdern schwerlich eines finden, das mit gleicher Kürze und Wohlfeilheit so viel Gründlichkeit vereinigte als hier niederlegt worden ist. Und es hat für den denkenden Menschen einen eigenthümlichen Reitz, nicht nur zu wissen, wie man rechnet, sondern auch warum man so und nicht anders verfährt. Darum hat dieses Büchlein auch solchen Männern gefallen, welche lange und vielfältig im Rechnen geübt waren, aber hier erst die Gründe ihres Verfahrens kennen gelernt haben. Um nun auch für die Zukunft diesem Werkchen seinen Werth zu sichern, und ihm noch mehr Aufmerksamkeit und Beifall zu verschaffen, habe ich es Zeile für Zeile von neuem durchgegangen und zahlreiche Verbesserungen an=

gebracht. Wer sich die Mühe nehmen will, diese Auflage mit der ersten zu vergleichen, der wird fast auf jedem Blatte die bessernde Hand wahrnehmen. Aber auch vermehrt erscheint diese Auflage. Ich bin nämlich dem Wunsche, in diese Anleitung zugleich auch den Unterricht von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel aufzunehmen, um so lieber entgegen gekommen, da einerseits nunmehr dieses Buch in den Vorbereitungsklassen und in dem Progymnasium der höhern Lehranstalten meines Vaterlandes zur vollständigen Grundlage des Unterrichts dienen kann, anderseits aber sich dasselbe genauer an meine übrigen mathematischen Lehrbücher, namentlich an meine mit Beifall aufgenommenen Anfangsgründe der mathematischen Analysis &c. anschließt. So möge denn auch fernerhin diese Anleitung das Ihrige beitragen, gründliches Rechnen zu befördern und zu verbreiten, und Lust und Liebe daran zu erwecken und zu unterhalten! Hof, im Heumonate 1818.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Um dieß Werkchen des Beifalls, den es fortdauernd genießt, immer würdiger zu machen, habe ich demselben nicht nur diejenigen Verbesserungen gegeben, welche ich bei dem öftern Gebrauche im Unterricht für zweckdienlich hielt, sondern ich habe es auch für diese dritte Auflage von neuem sorgfältig durchgegangen, und, wie ich hoffe, beifallswürdige Aenderungen und Erweiterungen gemacht. Man hat überdieß gewünscht, daß mehre Beispiele zur Uebung möchten gegeben werden. Auch hierin habe ich gerne gewillfahret und für jede Rechnungsart Beispiele, jedoch ohne die Auflösung, beigefügt. Auf diese Weise kann ein Lehrer, besonders wenn er eine zahlreiche Klasse hat, alle Schüler, die vorzüglichen so wie die mittelmäßigen, gleich nützlich beschäftigen. Denn während der langsame Schüler noch an seiner Aufgabe arbeitet, oder des Lehrers Nachhilfe in Anspruch nimmt, kann nun dem geschickten Schüler ein und das andere Beispiel aus dem Buche ohne allen Zeitverlust zur weitern Beschäftigung aufgegeben werden. So wird der geschickte und fleißige

Schüler nicht aufgehalten oder unbeschäftigt gelassen, und der langsame bleibt nicht zurück. Zu diesem und ähnlichen Behufe habe ich noch ein neues Kapitel beigefügt, das Aufgaben enthält, deren Auflösung zwar auf den vorhergehenden Grundsätzen, aber nicht unmittelbar auf den vorhergehenden Regeln beruht, die aber doch noch bei angestrengtem Nachdenken und einer gehörigen Gabe von Scharfsinn durch die Zahlenarithmetik können aufgelöset werden. Daß selbst erwachsene Personen sich noch gerne mit der Auflösung solcher und ähnlicher Aufgaben beschäftigen, lehrt mich eine häufige Erfahrung. Darum wird man diese neue Zugabe nicht ohne Zufriedenheit aufnehmen, um so mehr, da der uneigennützige Herr Verleger, ungeachtet der Vergrößerung des Buches, den Preis desselben sogar herabgesetzt hat. Auch die angehängten Tabellen über die verschiedenen Münzen, Maaße und Gewichte werden willkommen sein, da man schon beim Lesen der Zeitungen Aufschlüsse über solche Gegenstände nöthig hat. Dem Gewerbsmann, Künstler, Kaufmann und Gelehrten sind dergleichen Kenntnisse ohnedieß unentbehrlich. Der Druck ist gut und korrekt; nur ist S. 33 Zeile 24 von oben $\frac{4}{7}\frac{1}{8}$ statt $\frac{4}{7}^{4}$ stehen geblieben.

Baireuth, im Ostermonat 1823.

Dr. Neubig.

Der Rechenkunst
Erstes Kapitel.
Von den Zahlen, insbesondere den ganzen, und den vier Rechnungsarten mit denselben.

§. 1. Die Rechenkunst (Arithmetik) lehrt die Eigenschaften der Zahlen und das richtige und sichere Verfahren, aus gegebenen oder bekannten Zahlen und ihrem Verhalten zu einander andere unbekannte zu finden.

Unter einer Zahl versteht man eine zusammengefaßte oder bestimmte Menge von gleichartigen Dingen. Man nennt aber Dinge gleichartig, insofern man bei ihnen nur eine oder mehre Eigenschaften betrachtet, welche sie gemeinschaftlich haben; ungleichartig, in wie fern man auf das sieht, was in ihnen verschieden ist. Das Gleichartige, dessen Menge durch die Zahl bestimmt wird, heißt die Einheit. Daher kann man auch sagen: die Zahl ist ein Inbegriff von Einheiten. Z. B. Man sieht einen Haufen Obst. Wenn man bei den einzelnen Stücken nur darauf sieht, daß jedes die Eigenschaft hat, um sie zum Obste zählen zu können: so sind es lauter gleichartige Dinge, und sie alle bilden z. B. die Zahl 100 (Hundert). Diese 100 Stück Obst können aber insofern ungleichartig oder verschiedenartig sein, daß einige (z. B. 30 d. h. dreißig) die Eigenschaft der Aepfel, andere (z. B. 50 d. h.

funfzig) die Eigenschaft der Birnen, und die übrigen (z. B. 20 d. h. zwanzig) die Eigenschaft der Nüsse haben. In Bezug auf Obst gilt jedes einzelne Stück für die Einheit der Zahl 100; in Bezug auf die Aepfel nur jeder einzelne Apfel u. s. w. für die Einheit. Man kann aber die Einheit auch wieder aus mehren Einheiten zusammengesetzt denken und nehmen, z. B. wenn man im gemeinen Leben sagt: 2 (zwei) Schock Nüsse, so versteht man zwei Einheiten, von welchen aber jede selbst aus 60 (sechzig) Stücken (Einheiten) besteht.

§. 2. Durch Wiederholung der Einheit entstehen alle ganze Zahlen. Eins und Eins zusammen genommen nennt man Zwei, Zwei und Eins zusammen heißt Drei, Drei und Eins gibt Vier, Vier und Eins gibt Fünf, Fünf und Eins heißt Sechs, Sechs und Eins heißt Sieben, Sieben und Eins ist Acht, Acht und Eins gibt Neun, Neun und Eins heißt Zehn. Nun fängt man wieder von vorne an und zählt: Zehn und Eins, wofür man aber kürzer Eilf sagt; Zehn und Zwei, wofür Zwölf gesagt wird; Zehn und Drei, wofür Dreizehn; ferner Vierzehn, Funfzehn u. s. w. bis man auf Zehn und Zehn kommt, wofür man Zwanzig sagt. Von hier zählt man weiter: Ein und zwanzig, Zwei und zwanzig u. s. w. Dreimal Zehn heißt Dreißig, viermal Zehn Vierzig u. s. w. Zehnmal Zehn heißt Hundert; zehnmal Hundert gibt Tausend; tausendmal Tausend nennt man eine Million; millionenmal Million heißt Billion; millionenmal Billion gibt Trillion u. s. w.

§. 3. Die neun ersten Zahlen heißen Einer oder einfache Einheiten; die Zahlen von Zehn bis Neunzig heißen Zehner, von Hundert bis Neunhundert Hunderter, von Tausend bis Neuntausend Tausender u. s. w. Man pflegt die Zahlen auch nach Ordnungen einzutheilen, und rechnet die Zehner zur ersten Ordnung, die Hunderter zur zweiten u. s. w. Man sieht leicht ein, daß die Einheit jeder höhern Ordnung zehn Einheiten der nächstniedrigern in sich begreift, z. B. 1 Zeh-

ner enthält 10 Einer, 1 Hunderter 10 Zehner, 1 Tausender 10 Hunderter, u. s. w.

§. 4. Zur Bezeichnung der verschiedenen Zahlen hat man gewisse Zeichen, die man Ziffern nennt; diese sind für die neun ersten Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Durch eben diese Ziffern können aber auch alle höheren Zahlen ausgedrückt werden. Dieß geschieht dadurch, daß die Ziffern durch die Stelle, in der sie stehen, von der Rechten gegen die Linke einen immer zehnmal grössern Werth erhalten, als in der nächstvorhergehenden. In der ersten Stelle zur Rechten stehen die Einer; in der zweiten von der Rechten gegen die Linke stehen die Zehner; in der dritten die Hunderter; in der vierten die Tausender; in der fünften die Zehntausender; in der sechsten die Hunderttausender, in der siebenten die Millionen, in der achten die Zehnmillioner u. s. w. Die 13te Stelle nehmen die Billioner, und die 19te die Trillioner ein. Wenn Einheiten einer gewissen Ordnung in einer Zahl, wo doch Einheiten von einer höhern Ordnung vorkommen, fehlen: so bezeichnet man die Stelle der fehlenden Einheiten mit 0 (Null).

§. 5. Diesemnach wird man ohne Schwierigkeit vorgelegte Zahlen aussprechen, und vorgesprochene niederschreiben können. So bedeutet 8 acht, und 82 achtzig und zwei d. i. zwei und achtzig. 825 ist achthundert und fünf und zwanzig; dagegen 805 achthundert und fünf; denn die Null in der zweiten Stelle von der Rechten gegen die Linke zeigt an, daß keine Zehner vorhanden sind. 8476 ist acht tausend, vierhundert und sechs und siebenzig; dagegen 8070 acht tausend und siebenzig; nämlich die erste Nulle von der Rechten an bedeutet, daß keine Einer, und die in der dritten Stelle sagt, daß keine Hunderte da sind. 12538 ist zwölf tausend, fünf hundert und acht und dreißig, und 904603 ist neunhundert und vier tausend, sechshundert und drei. Vor Allem übe man sich, 6 Ziffern aussprechen zu können. Denn die Ziffern nach der 6ten Stelle ge-

gen die Linke werden gleichsam als für sich bestehend betrachtet, nur daß sie die Millionen bezeichnen; eben so die Ziffern nach der 12ten Stelle, welche Billionen bezeichnen u. s. w. Zur Erleichterung mache man über die 7te Ziffer von der Rechten einen Strich oder Punkt zur Bezeichnung der Millionen, über die 13te Ziffer zwei Striche oder Punkte für die Billionen, über die 19te Ziffer drei für die Trillionen u. s. f. Z. B. die Zahl

$$\overset{\prime\prime\prime}{1}2708\overset{\prime\prime}{3}32004\overset{\prime}{9}85200464$$

wird ausgesprochen: Zwölf Trillionen, sieben Hundert und acht Tausend drei Hundert und zwei und dreißig Billionen, vier Tausend neun Hundert und fünf und achtzig Millionen, zweimalhundert Tausend vier Hundert und vier und sechzig.

Das Verfahren, Zahlen auszusprechen und zu schreiben, heißt das Numeriren.

§. 6. Man kann sich jede Einheit und jede Größe als ein Ganzes vorstellen, z. B. 1 Pfund, 1 Gulden. Durch Wiederholung der Einheit entstehen die ganzen Zahlen, z. B. 1 Pfund, 6mal genommen, gibt 6 Pfunde. Eben so sind 8 Lothe, 12 Kreuzer, ohne Bezug auf andere Größen betrachtet, ganze Zahlen; aber in Bezug auf Pfunde sind 8 Lothe nur Theile von 1 Pfund, weil 32 Lothe erst 1 Pfund ausmachen; und 12 Kreuzer sind in Bezug auf 1 Gulden nur Theile von 1 ganzen Gulden; denn 60 Kreuzer betragen erst 1 Gulden. Solche Zahlen, welche einen oder mehre Theile einer Einheit oder eines Ganzen ausdrücken, heißen gebrochene Zahlen oder Brüche, von welchen in einem besondern Kapitel wird gehandelt werden.

§. 7. Mit den Zahlen können insbesondere vier Hauptverrichtungen vorgenommen werden, nämlich: das Verfahren, mehre von einander verschiedene Zahlen in einer einzigen auszudrücken, welche so viele Einheiten enthält, als die einzelnen Zahlen zusammen genommen haben, heißt die Addition; diejenige Zahl, welche allen zusammen genommen

gleich ist, heißt die Summe. Das Verfahren, eine Zahl so oft oder so vielmal zu nehmen, als eine andere Zahl anzeigt, heißt die Multiplikation; die erste Zahl heißt der Multiplikand, die zweite der Multiplikator, beide Zahlen heißen auch Faktoren, und die durch Multiplikation gefundene Zahl nennt man das Produkt. Wenn von einer Zahl so viele Einheiten weggenommen werden, als eine andere Zahl anzeigt, so heißt dieses Verfahren die Subtraktion oder das Abziehen; diejenige Zahl, von welcher der Abzug geschieht, heißt der Minuend; diejenige, welche abzieht, der Subtrahend; was übrig bleibt, nennt man den Rest, den Unterschied, auch die Differenz. Oder: eine Zahl von einer andern abziehen (subtrahiren) heißt den Unterschied jener zwei Zahlen finden, oder eine dritte Zahl finden, welche den Unterschied jener zwei Zahlen angibt. Eine Zahl (den Dividenden) durch eine andere (den Divisor) dividiren heißt jene erstere in so viele gleiche Theile theilen, als die andere angibt; oder von der erstern Zahl die zweite so oft wegnehmen, als diese in jener enthalten ist; oder allgemein durch die Division findet man, wie vielmal eine Zahl (der Divisor) in einer andern (dem Dividenden) enthalten ist. Die gefundene Zahl nennt man den Quotienten.

In jedem Fall ist der Dividend ein Produkt, welches den Divisor und Quotienten zu seinen Faktoren hat, so daß entweder der Divisor mit dem Quotienten oder dieser mit jenem multiplicirt den Dividenden zum Produkte geben muß.

Diese genannten Rechnungsarten sind unter dem Namen der 4 Species der Rechenkunst bekannt.

§. 8. Für die gedachten Rechnungsarten hat man auch gewisse Zeichen eingeführt. So ist das Zeichen der Addition ein stehendes Kreuz (+), welches man zwischen die zu addirenden Zahlen setzt, und das Zeichen, daß ein Zahlenausdruck einem an-

dern gleich sei, ist = z. B. 8 + 4 = 12 bedeutet: 8 und 4 ist gleich oder so viel als 12. Das Zeichen der Subtraktion ist ein Querstrich (—), welchen man zwischen den Minuend und Subtrahend setzt, z. B. 13 — 7 = 6 liest man: 13 weniger 7 ist gleich 6, oder 7 von 13 bleibt 6. Das Zeichen der Multiplikation ist ein Punkt oder ein liegendes Kreuz (. oder ×), z. B. 3. 6 = 18 oder 3 × 6 = 18 bedeutet: 3 durch 6 multiplicirt ist gleich 18. Für die Division gebraucht man den Doppelpunkt oder einen Querstrich (: oder —), z. B. 24: 8 = 3 oder

$$\frac{24}{8} = 3$$

heißt: 24 durch 8 dividirt ist gleich 3. Man übersehe hiebei nicht, daß der Dividend immer vor dem Doppelpunkt und der Divisor nach demselben gesetzt werden müsse; welches von vielen Rechnern vernachlässigt oder verkehrt gemacht wird.

Die Addition.

§. 9. **Aufgabe:** Verschiedene Zahlen zusammen zu addiren.

Auflösung. 1. Man schreibe die Zahlen so unter einander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe einen Strich darunter.

2. Nun zähle man alle in der ersten Reihe rechter Hand d. h. in der Reihe der Einer befindlichen Zahlen zusammen und setze die Menge der Einer unterhalb des Striches unter die Einer; die Zehner, Hunderter u. s. w. aber, die sie etwa noch enthält, werden zu den Zehnern, Hunderten u. s. w. gezählt und müssen daher im Sinne behalten oder über dem Strich zu den Zehnern, Hunderten hingeschrieben werden.

3. Hierauf zähle man alle Zahlen der zweiten Reihe d. i. der Zehner mit den aus der ersten Reihe im Sinne behaltenen oder über den Strich hingeschriebenen zusammen. Wenn die Summe derselben

aus mehr als einer Ziffer besteht, so enthält die niedrigste die Zehner, welche unterhalb des Striches unter die Zehner gesetzt wird; die zweite Ziffer sind Hunderter, die dritte Tausender, welche daher auch zu den Hunderten, Tausenden u. s. w. gezählt werden müssen. Sie werden demnach im Sinne behalten oder sogleich oberhalb des Striches zu ihren Reihen gesetzt.

4. Alsdann zähle man die Zahlen der dritten Reihe d. i. der Hunderter nebst den aus der vorigen Reihe im Sinne behaltenen oder ausdrücklich hingeschriebenen Zahlen zusammen. Die Hunderter dieser Reihe zusammen schreibe man unter die Hunderter; aber die Tausender, Zehntausender, die etwa in derselben Reihe enthalten sein möchten, zähle man zu ihren zugehörigen Ordnungen, wie vorhin.

5. Und so fahre man fort, bis man zur letzten Reihe, d. i. zur höchsten Ordnung der gegebenen Zahlen kommt, deren Summe dann ganz hingeschrieben wird.

Nachstehendes Beispiel ist so gerechnet, einmal, daß die aus einer Reihe in die andere überzutragenden Zahlen einschließungsweise hingeschrieben sind; das anderemal so, daß man sie im Sinne behält:

		6	0	3	8	4	60384
			7	2	3	3	7233
		8	6	1	1	0	86110
				5	3	9	539
					1	8	18
			5	2	0	4	5204
		(1)	(1)	(1)	(2)		159488
Summe	1	5	9	4	8	8	

Aus der Art des Verfahrens erhellet zugleich die Richtigkeit desselben. Denn bei der Addition will man wissen, wie viel Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. ꝛc. mehre einzelne Zahlen ausmachen — und dieß wird durch obiges Verfahren bewerkstelliget.

§. 10. Um sich zu überzeugen, daß man sich im Zusammenzählen nicht geirrt habe, ist es gut, des

nämliche Beispiel zweimal, nämlich einmal abwärts, das anderemal aufwärts, zu rechnen. Eine andere Probe kann erst bei der Subtraktion gezeigt werden.

§. 11. Zur Uebung im Addiren mögen folgende Beispiele dienen:

1) Welches ist die Summe folgender Zahlen: 2154, 1023, 530, 1343, 3213, 225, 36, 100?

2) Man suche die Summe der Zahlen: 345, 110, 538, 248, 150, 312, 475, 590, 246, 687, 324, 109.

3) Man bringe folgende Zahlen in eine Summe: 12345, 21234, 36521, 15413, 43652, 10166, 57074, 36847, 25789, 40658.

4) Wie viel betragen folgende Zahlen: 3457, 5365, 1276, 3548, 4789, 2676, 6396, 3878, 1559, 5788, 2667, 7869, 3477, 6796, 5388, 6659, 1967, 4875, 3798, 5689?

5) Man addire Folgendes: 24730, 65064, 8697, 52478, 70956, 46589, 5045, 37853, 798, 84095, 60474, 89, 8960, 57498.

6) Man bestimme die Summe folgender Zahlen: 483256, 358767, 197689, 546876, 260518, 315961, 507897, 488689, 156413, 646768, 112576, 504689, 387067, 798636, 132108, 112576, 569879, 216487, 651966, 420798, 158643, 507889.

7) Man addire: 3705, 1343, 617, 135, 8745, 456, 119, 45, 5584, 9783, 4, 60, 138, 12, 14803, 27, 60390, 24781, 22354.

8) Man addire: 421, 3276, 121, 840, 3268, 76093, 1740, 968, 4355, 24867, 1342, 5972, 9176, 100, 82, 7, 13, 444, 7828.

9) Man addire: 21744, 33, 1234, 8155, 616, 3262, 18514, 73, 5, 916, 23, 7046, 634152, 119, 308, 5106, 771, 35087.

10) Man summire: 651423, 89102, 1243, 818, 29, 6, 54, 371, 3482, 50800, 315611, 49712, 8430, 913, 81, 6.

11) Man summire: 375, 8528, 6885, 797, 9394, 2195, 73, 99, 8774, 83, 66425, 484, 30674, 3748, 75, 4, 299, 638.

12) Man summire: 15429, 368, 75, 2186, 347, 88, 40737, 54, 3818, 8196, 38, 255, 724, 136, 2831, 506, 198, 3449, 8007, 665, 21157, 9406, 3192, 730894.

13) Man bringe folgende Zahlen in eine Summe: 975, 796, 36, 1905, 72447, 9546, 8264, 64099, 136389, 35930, 8674, 953, 6, 87, 2796, 105, 26039, 49576, 68945, 3596.

14) Man suche die Summe folgender Zahlen: 3345, 767, 13, 421, 5998, 946, 1132, 79, 12800, 5458, 2391, 6378.

15) Man addire: 6, 45, 134, 2308, 50488, 760552, 1234567, 918273, 80042, 6731, 389, 42, 8.

16) Man summire: 54783, 118, 20356, 929046, 819, 7623, 402133, 1840623, 7, 33148, 54, 921, 66, 50287, 8706648, 6424, 12706, 1822.

Die Subtraktion.

§. 12. Aufg. Eine kleinere Zahl von einer größern zu subtrahiren oder abzuziehen.

Aufl. Man schreibe die kleinere Zahl so unter die größere, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Huuderter u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe dann einen Strich.

Hierauf nehme man die Einer des Subtrahends von den Einern des Minuends weg und setze den Rest unterhalb des Striches unter die Einer; eben so verfahre man mit den Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w. bis zur letzten oder höchsten Ordnung der gegebenen Zahlen: so wird der Aufgabe ein Genüge geschehn.

Wenn eine untere Zahl größer sein sollte als eine obere, und also der Abzug nicht geradezu geschehen kann: so borge man in der nächsthöhern Ordnung des Minuends eine Einheit oder 1. Diese gibt, wie man (aus §. 3.) weiß, 10 Einheiten für die Stelle, für welche geborgt wird; man addire also diese 10 zu dieser Stelle und man wird dann immer abziehen können.

Damit man es nicht übersehe und vergesse, daß von der nächstfolgenden Ziffer eine Einheit geborgt worden und sie also um 1 verringert ist, so kann man diese Ziffer mit einem Punkt bezeichnen.

Ereignet es sich, daß die Ziffer, von der eine Einheit geborgt wird, eine Null (0) ist: so muß diese selbst erst von der nächsthöhern Ordnung eine Einheit für sich borgen. Dadurch wird die Nulle zu 10 und weil eine Einheit für die nächstniedrige Ziffer abgegeben wird, so bleiben an der Stelle der Null nur noch 9 Einheiten übrig. Eben so verhält es sich auch, wenn mehre Nullen nach einander folgen. Beispiele:

Minuend	835764	1562388
Subtrahend	611352	725417
Rest	224412	836971

4526082	78062004
632493	741536
3893589	77320468

§. 13. Wenn man zu einem Rest die Zahl wieder hinzufügt, die man von einer gewissen Summe weggenommen hatte: so muß nothwendig die vorige Summe wieder zum Vorschein kommen. Man addire also zum Rest den Subtrahenden; und es wird der Minuend herauskommen. Dieß dient als Probe der Subtraktion. Z. B.

	218045			650047	
	137846	addirt		138229	addirt
Rest	80199		Rest	511818	
	218045			650047	

§. 14. Die Subtraktion dient aber auch der Addition zur Probe, dadurch, daß, wenn man die Hauptsumme gefunden hat, man die summirenden Zahlen nochmals addirt, aber eine von ihnen, z. B. die ober-

ste, wegläßt, und nun diese Theilsumme von der Hauptsumme abzieht. Der Rest muß die weggelassene Zahl geben. Z. B.

730852	
66109	
31074	
342	
828377	Hauptsumme
97525	Theilsumme
730852	Rest, wie die weggelassene Zahl.

§. 15. Beispiele zur Uebung:

1) Was bleibt zum Rest, wenn man 605286 von 1214805 abzieht?

2) Subtrahire 4305079 von 6010109.

3) Ziehe 68050420 von 86041070 ab.

4) Suche den Unterschied zwischen 500708105 und 341065608.

5) Welches ist der Rest, wenn man 9421008 von 54300000 abzieht?

6) Ziehe 3905010110 von 5010101010 ab.

7) Ziehe ab 243546 von 784898.

8) 483051 von 780928.

9) 38259 von 46866.

10) 60076 von 145630.

11) 47830892 von 48953478.

12) 3572519 von 3690026.

13) 63278 von 4203142.

14) 827740 von 1834906.

15) 372985 von 563072.

16) 39697845 von 50706481.

17) 270896 von 118700035.

18) 539644 von 708200008.

19) 19283 von 625078290.

20) 47602800 von 48126140.

21) 63807958 von 63891022.

22) 848563 von 52047518.

23) 9074856 von 12400023.

24) 76125589 von 250300812.

Die Multiplikation.

§. 16. Ehe man zum Multipliciren schreitet, muß man sich mit dem sogenannten **Ein mal Eins** bekannt machen, welches die Produkte aller einfachen Zahlen oder der Einer enthält und in folgendem Täfelchen dargestellt ist:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Das Produkt von zwei einfachen Zahlen findet man immer da, wo die lothrechte und wagrechte Reihe durch beide Zahlen sich schneiden, z. B. 6. 8 = 48 und 8. 6 = 48; woraus zugleich erhellet, daß einerlei Produkt herauskommt, wenn gleich die Faktoren ihre Stellen verändern, wie hier 6. 8 und 8. 6 immer 48 geben.

§. 17. **Aufg.** Eine jede Zahl mit einer einfachen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Von der Rechten gegen die Linke anfangend mache man die Produkte einer jeden Ziffer des Multiplikanden in den Multiplikator, setze die niedrigste Ziffer eines jeden einzelnen Produktes in eben die Stelle, wo die Ziffer des Multiplikanden stehet, und addire die höchste Ziffer, welche etwa noch vorkommt, zum nächsten folgenden Produkte. Z. B.

```
 7012045 Multiplikand
       6 Multiplikator
--------
42072270 Produkt.
```

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird man aus folgender Betrachtung erkennen. Indem man die 5 Einer des Multiplikanden 6 mal nimmt, erhält man

30 Einer d. i. 3 Zehner und keinen Einer. Die Null unter dem Strich zeigt an, daß keine Einer vorhanden sind; die 3 Zehner aber sind natürlich zu den folgenden Zehnern gezogen worden, nämlich 4 Zehner 6 mal genommen geben 24 Zehner, und 3 Zehner aus den vorigen Einern dazu, machen 27 Zehner, d. i. 2 Hunderter und 7 Zehner. Die 7 Zehner sind unter die Zehner gesetzt worden, und die 2 Hunderter kommen zu den Hunderten. Hier aber sollen gar keine Hunderter genommen werden (6. 0 = 0); darum wurden die 2 aus den Zehnern entstandenen Hunderter geradezu an ihre Stelle gesetzt. 2 Tausender 6 mal genommen geben 12 Tausender d. h. 1 Zehntausender und 2 Tausender; diese sind unter den Tausendern bemerkt, und jene zu den Zehntausendern addirt worden; nämlich 1 Zehntausender 6 mal genommen gibt 6 Zehntausender und 1 aus den vorigen gewonnen macht 7 Zehntausender, die man an ihrer Stelle findet. Hunderttausender sollen gar nicht genommen werden; dieß ist durch eine Null an ihrem Orte bemerket worden. 7 Millioner sollen 6 mal genommen werden; dieß gibt 42 Millioner, welche auch ihren Platz erhalten haben.

Man könnte das ganze Verfahren auch versinnlichend darstellen auf folgende Weise

58736	
5	
30	Einer
15	Zehner
35	Hunderter
40	Tausender
25	Zehntausender
293680	Produkt,

§. 18. **Aufg.** Eine jede Zahl mit einer jeden andern zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach der Reihe die einzelnen Ziffer des Multiplikanden, wie vorhin erstlich in die Einer, dann in die Zehner, Hunderter des Multiplikators u. s. w. nur daß man die einzelnen

Produkte immer um eine Stelle weiter zur Linken rückt, so oft man mit einer höhern Stelle des Multiplikators zu multipliciren anfängt, so daß allemal die niedrigste Ziffer eines jeden Produkts unter diejenige Ziffer des Multiplikators, von welcher das Produkt herrührt, zu stehen komme.

Wenn daher in dem Multiplikator Nullen vorkommen, so muß man die Produkte auch wegen einer jeden Null um eine Stelle weiter fortrücken.

Am Ende addire man alle einzelne Produkte zusammen, so erhält man das ganze Produkt der beiden gegebenen Zahlen. Beispiele:

150874	42187
359	6032
1357866	84374
754370	126561
452622	253122
54163766	254471984

Das stufenfolge Einrücken der einzelnen Produkte erklärt sich, wenn man ein Beispiel vollständig rechnet und hinschreibt, also:

150874	
359	
1357866	das Neunfache
7543700	das Fünfzigfache
45262200	das Dreihundertfache
54163766	

§. 19. Wenn der Multiplikand und der Multiplikator am Ende Nullen haben, so braucht man nur die geltenden Ziffern, wie bisher, unter einander zu schreiben, und dann wie vorhin zu verfahren. An das Produkt werden dann so viele Nullen gesetzt, als beide Faktoren zusammen genommen haben. Z. B.

1093000	913200
80	17000
87440000	63924
	9132
	15524400000

§. 20. Der Anfänger mag sich noch in folgenden und andern Beispielen üben:

1) 5827366 × 2 gibt
2) 456218 × 3 gibt
3) 1723586 × 4 gibt
4) 3872149 × 7 gibt
5) 840932 × 9 gibt
6) 583142 × 12 gibt
7) 79530 × 26 gibt
8) 45072 × 39 gibt
9) 14917 × 48 gibt
10) 79406 × 71 gibt
11) 6042097 × 86 gibt
12) 28451 × 265 gibt
13) 79623 × 456 gibt
14) 92780 × 460 gibt
15) 5768 × 799 gibt
16) 37059 × 801 gibt
17) 640258 × 925 gibt
18) 236489 × 2662 gibt
19) 6894000 × 3456 gibt
20) 100006 × 5006 gibt
21) 290180300 × 7080 gibt
22) 865439 × 8183 gibt
23) 2305806 × 40705 gibt
24) 9833 × 482756 gibt
25) 154706 × 517190 gibt
26) 718590000 × 3690000 gibt
27) 6045310267 × 4003981 gibt
28) 48537090 × 62800974 gibt

Die Division.

§. 21. Aufg. Eine jede Zahl durch eine einfache zu dividiren.

Aufl. Man schreibe den Divisor zur Linken neben dem Dividenden, und suche zur Rechten den Quotienten auf folgende Weise: Man vergleiche den Divisor mit der höchsten Ziffer des Dividenden, oder, wenn diese kleiner als der Divisor ist, mit den zwei

höchsten Ziffern desselben, und untersuche, wie oft er darin enthalten ist. Die Zahl, die dieses Vielfache anzeigt, gibt die höchste Ziffer des zu suchenden Quotienten. Mit ihr multiplicire man nun den Divisor; ziehe das Produkt von den Ziffern, des Dividenden ab, mit welchen der Divisor verglichen wurde, und schreibe den Rest, wenn einer übrig bleibt, darunter.

Nun nehme man die nächst niedrigere Ziffer des Dividenden zur Rechten, setze sie unter den Strich und zwar rechts neben dem etwa gebliebenen Rest, untersuche wiederum, wie vielmal der Divisor in der dadurch enthaltenen Ziffer steckt. Die Zahl, welche dieses Vielfache anzeigt, gibt die nächstniedrigere Ziffer des Quotienten. Mit ihr multiplicire man den Divisor und ziehe das Produkt von der verglichenen Zahl ab.

Zu dem etwaigen Reste bringe man die folgende Ziffer des Dividenden und behandele diese Zahl, so wie jeden folgenden Rest und die dazu genommene Ziffer des Dividenden, wie die vorhergehenden Zahlen, bis man jede Ziffer des Dividenden mit dem Divisor verglichen und auf diese Weise alle Ziffern des Quotienten nach und nach gefunden hat.

Wenn bei einer Subtraktion kein Rest übrig bleibt, und die heruntergebrachte Ziffer des Dividenden kleiner als der Divisor ist, folglich in ihr der Divisor gar keinmal steckt: so schreibe man eine Null an die zugehörige Stelle des Quotienten. Hierauf nehme man die nächstfolgende Ziffer des Dividenden herab und verfahre wie vorhin. Beispiele:

1) Divisor	Dividend	Quot.	2) Divis.	Divid.	Quot.
2	7308	3654	8	23264	2908
	6			16	
	13			72	
	12			72	
	10			64	
	10			64	
	8			*	
	8				
	*				

```
Divisor |Dividend Quotient
      5 |513840   (102768        7|30461725 (4351675
        |5                        |28
        ---                       ---
          13                        24
          10                        21
          ---                       ---
           38                        36
           35                        35
           ---                       ---
            34                        11
            30                         7
            ---                       ---
             40                        47
             40                        42
             ---                       ---
              *                         52
                                        49
                                        ---
                                         35
                                         35
                                         ---
                                          *
```

Das richtige Verfahren der Division erhellet aus folgender vollständigern Darstellung des zweiten Beispiels:

```
   8|23264 (2000 )
      16000   900 |
   ----------     }  addirt
       7264    00 |
       7200     8 )
   ----------------
         64  2908    wie vorhin.
         64
       --------
```

Nämlich 8 ist in 23264 nur 2000mal enthalten, weil 3000 . 8 schon 24000 ausmachen; aber 8 . 2000 = 16000; diese werden von 23264 abgezogen, bleibt zum Rest 7264. Weil in diesem Rest die Zahl 8 mehrere hundertmal steckt, nämlich 900 mal, so wird abermals das Produkt 8 . 900 = 7200 von der Zahl 7264 abgezogen; und es bleibt zum Rest 64. Nach den Hunderten ist nachzusehen, ob auch 8fache Zehner im Reste 64 enthalten sind. Allein schon ein Zehner 8 mal genommen (d. i. 8 × 10

= 80) gibt 80. Also ist in 64 die Zahl 8 kein 10 mal enthalten, was daher durch Nullen in der Stelle der Zehner bemerkt worden ist; wohl aber sind mehre Einheiten, nämlich 8, in 64 enthalten. Das Produkt 8 . 8 = 64 wird dann gar abgezogen.

§. 22. Aufg. Eine gegebene Zahl durch eine jede andere kleinere zu dividiren.

Aufl. Man vergleiche anfangs den Divisor entweder mit dem aus eben so vielen höchsten Ziffern bestehenden Theile des Dividenden, oder, wenn dieser Theil kleiner als der Divisor ist, nehme man noch eine Ziffer des Dividenden dazu; suche jetzt das Vielfache des Divisors, welches dem verglichenen Theile des Dividenden gleich oder am nächsten kommt, und die höchste Ziffer des Quotienten ist; und ziehe das Produkt dieses ersten Theils des Quotienten in den Divisor von den verglichenen höchsten Stellen des Dividenden ab. Uebrigens verfahre man hier völlig so, wie vorhin (§. 21.).

Um jene Vergleichung anzustellen und das Vielfache des Divisors schneller und leichter zu finden, sucht man nur, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten Ziffer oder, wenn diese kleiner ist, in den beiden höchsten Ziffern des Dividenden enthalten ist, und setzt voraus, der ganze Divisor stecke eben so oft in den ihm zugehörigen Ziffern. Diese Voraussetzung kann falsch sein; denn wenn man das Vielfache des Divisors nimmt, so wird häufig die erste Ziffer desselben durch das, was von den Vielfachen der nachfolgenden Ziffern zu ihr herübergetragen wird, vergrößert; indessen entdeckt sich der Fehler bald dadurch, daß das Vielfache des Divisors von dem verglichenen Theil des Dividenden nicht abgezogen werden kann. Alsdann muß man den gefundenen Theil des Quotienten so lange vermindern, bis der Abzug statt findet. — Umgekehrt, wenn irgend ein Rest größer als der Divisor ist, so ist der Quotient zu klein genommen worden; also muß er vergrößert werden.

Wenn übrigens die heruntergenommene Ziffer

des Dividenden noch keine Zahl gibt, welche gleich groß oder größer als der damit zu vergleichende Divisor ist: so gebe man dem Quotienten eine Null für die zugehörige Stelle, und bringe noch eine Ziffer des Dividenden herunter; wiederhole dieses so lange, bis man auf eine solche Zahl kommt. Beispiel:

abgekürzt	vollständig	
167 | 535068 (3204	167 | 535068	(3000
501	501000	200
340	34068	00
334	33400	4
668	668	3204
668	668	
*	*	

Nämlich zuerst wird der Divisor 167 mit 535 verglichen, und man findet, daß er in 535, womit die Tausender anfangen, 3 tausendmal enthalten ist. Zum Rest 34 läßt man die 0 herab, womit die Hunderter anfangen. In 340 Hundertern aber ist der Divisor 2 hundertmal enthalten. Dieß zeigt die Zahl 2 im Quotienten in der Stelle der Hunderter; so wie vorhin 3 die Stelle der Tausender einnahm. Läßt man nun die 6, welche Zehner bedeutet, herab: so bekommt man 66 Zehner, in welchen 167 offenbar gar keinmal steckt, was auch im Quotienten durch die Null an der Stelle der Zehner bemerkt ist. Nun nimmt man vollends die 8 Einer herab: dieß gibt 668 Einer, in welchen der Divisor gerade 4 mal steckt. Aus dieser Betrachtung wird einem Jeden die Richtigkeit des Verfahrens beim Dividiren einleuchten.

§. 23. Kommen im Divisor und im Dividenden am Ende Nullen vor, so kann man gegen jede Null des Divisors eine Null des Dividenden wegstreichen, und alsdann dividirt man die beiden solchergestalt verkleinerten Zahlen nach den gewöhnlichen Regeln. Z. B.

```
2048Ø|1253376000Ø|(612000
      12288
      -----
       2457
       2048
       ----
        4096
        4096
        ----
         000
```

§. 24. Wenn am Ende der Division ein Rest bleibt, so enthält der Dividend den Divisor ein oder mehrmal ganz, und noch etwas von ihm darüber, welches keinen ganzen Divisor beträgt. Es wird ein Bruch (§. 6.) sein, wovon im folgenden Kapitel wird gehandelt werden. Beispiel:

```
32|180567(5642
   160
   ---
    205
    192
    ---
     136
     128
     ---
      87
      64
      --
      23 Rest.
```

§. 25. Die Multiplikation und Division dienen einander wechselseitig als Probe. Denn da bei der Multiplikation der eine Faktor in dem Produkt so oft enthalten ist als der andere Faktor anzeigt, so darf man nur, um die Multiplikation zu prüfen, das gefundene Produkt durch einen der beiden Faktoren dividiren: und der Quotient wird den andern Faktor geben.

Will man die Division prüfen, so multiplicire man den Divisor mit dem gefundenen Quotienten und addire zu diesem Produkt den etwa gebliebenen Rest, und man wird wieder den Dividenden erhalten. Denn der Quotient sagt aus, wie oft der Divisor in dem Dividenden enthalten ist.

§. 26. Zur Uebung mögen folgende Bispiele dienen, wobei zu merken ist, daß die Zahl vor dem

Doppelpunkt (:) den Dividend, und die nach demselben den Divisor bezeichnet (vgl. §. 8.).

1) 47361498 : 2 gibt
2) 1258346 : 3 gibt
3) 708159286 : 4 gibt
4) 30210078 : 7 gibt
5) 23864118592 : 8 gibt
6) 1765960 : 9 gibt
7) 38304 : 16 gibt
8) 563004281762 : 25 gibt
9) 14799384 : 31 gibt
10) 817596 : 78 gibt
11) 179829 : 87 gibt
12) 308763 : 91 gibt
13) 167770515 : 213 gibt
14) 2067696 : 346 gibt
15) 8796114 : 486 gibt
16) 2847000 : 730 gibt
17) 73642044 : 987 gibt
18) 1025133848 : 2558 gibt
19) 6403023 : 3272 gibt
20) 1026056 : 4008 gibt
21) 970307328 : 6736 gibt
22) 586745600 : 7840 gibt
23) 55575912 : 18168 gibt
24) 22195875563 : 38209 gibt
25) 1732693722 : 54123 gibt
26) 17251934000 : 157840 gibt
27) 3859132746 : 975962 gibt
28) 93857833230 : 2305806 gibt
29) 323782108052 : 6438172 gibt
30) 2396876003700 : 51796348 gibt

Zweites Kapitel.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 27. Ein Ganzes kann man sich in mehre gleiche Theile getheilt denken. Eine Zahl nun, wel-

che einen oder mehre solcher Theile ausdrückt, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Das Ganze, worauf sich diese Theile beziehen, kann man die Grundeinheit nennen. Zur vollständigen Bezeichnung eines Bruches braucht man zwei Zahlen: die eine, welche angibt, in wieviel gleiche Theile das Ganze oder die Grundeinheit getheilt ist, heißt der Nenner; die andere, welche anzeigt, wieviele solcher Theile genommen sind, heißt der Zähler. Man schreibt beide Zahlen unter einander, so daß der Zähler oben, der Nenner unten zu stehen kommt, und zwischen ihnen wird ein Querstrich gezogen. Z. B. Wenn ein Ganzes in 4 gleiche Theile getheilt und 3 davon genommen werden, so schreibt man $\frac{3}{4}$. Eben so bedeutet $\frac{5}{7}$, daß ein Ganzes in 7 gleiche Theile getheilt und davon 5 genommen sind. Man liest beide Zahlenausdrücke: Drei Viertel, Fünf Siebentel.

Man theilt die Brüche in ächte oder eigentliche und in unächte oder uneigentliche. Erstere sind solche, welche kleiner als die Einheit sind oder deren Zähler kleiner als der Nenner ist, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$. Letztere sind solche, welche so groß oder größer als die Einheit sind oder deren Zähler so groß oder größer als der Nenner ist, z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{13}{6}$.

§. 28. Jeder Bruch läßt sich zugleich auch als ein Quotient betrachten, dessen Dividend der Zähler und dessen Divisor der Nenner des Bruches ist. Denn z. B. bei $\frac{5}{8}$ kann ich auch untersuchen, wie vielmal 8 (der Divisor) in 5 (im Dividenden) steckt. Offenbar aber steckt 8 auch nicht ein einzigmal in 5; vielmehr sind von den in 8 enthaltenen 8 Theilen nur 5 ein einzigmal in 5 enthalten d. h. die Zahl 8 steckt in 5 nur $\frac{5}{8}$ mal (Quotient). Darum haben auch die Brüche und die Quotienten ganz einerlei Bezeichnung.

§. 29. Der Rest, der am Ende einer Division übrig bleibt, ist daher der Zähler eines Bruches, dessen Nenner der Divisor ist. Dieser Bruch muß also noch zum Quotienten hinzugefügt werden, um diesen

vollständig zu erhalten. In obigem Beispiele der Division (§. 24.) ist folglich der vollständige Quotient $5642\frac{23}{31}$.

§. 30. Darum findet man den Werth eines unächten oder uneigentlichen Bruches in ganzen Einheiten, wenn man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirt z. B. $\frac{4}{4} = 1$ Ganzes, $\frac{18}{3} = 6$ Ganze, $\frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$ d. h. 5 Ganze und drei Viertel.

§. 31. Wenn man eines Bruches Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt, den Nenner aber ungeändert läßt: so wird der Bruch so vielmal größer, so viele Einheiten jene Zahl enthält. Denn dadurch ändert sich die Beschaffenheit der Theile nicht, sondern nur die Menge derselben, und die Größe des Bruches wächset mit der Menge der Theile.

Wird aber der Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und der Zähler unverändert gelassen: so wird der Bruch sovielmal kleiner, so viele Einheiten die ganze Zahl hat. Denn durch die Multiplikation des Nenners ändert sich die Beschaffenheit der Theile, *welche* kleiner werden, wenn der Nenner größer wird, und zwar um sovielmal kleiner, als die Zahl anzeigt, mit welcher man den Nenner multiplicirt. Da man nun der kleinern Theile nicht mehr nimmt, als vorher der größern: so wird der Bruch so vielmal kleiner, als die Theile kleiner geworden sind, d. h. als der Nenner größer geworden ist.

§. 32. Hieraus folgt: Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt: so ändert sich nicht der Werth oder die Größe des Bruchs, sondern blos seine Form. Denn die Multiplikation in den Zähler vergrößert den Bruch so vielmal, als die Multiplikation in den Nenner den vergrößerten wieder verkleinert. Z. B. $\frac{1}{2}$ im Zähler und Nenner durch 30 multiplicirt, gibt $\frac{30}{60}$ oder $\frac{1 \cdot 30}{2 \cdot 30} = \frac{30}{60}$. Ob also Jemand $\frac{1}{2}$ fl. d. i. einen halben Gulden hat, oder 30 solche Theile eines Gulden, der in 60 Theile getheilt ist d. i. 30 Kreuzer das ist gleichviel. Eben so $\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$.

§. 33. Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, der Nenner aber ungeändert bleibt: so wird der Bruch so vielmal kleiner, als der Zähler kleiner geworden ist. Denn durch die Division des Zählers wird die Anzahl der Theile verkleinert, die Beschaffenheit derselben hingegen bleibt unverändert.

Wird aber bei unverändertem Zähler der Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt: so wird der Bruch so vielmal größer, als der Nenner kleiner geworden ist. Denn durch die Verkleinerung des Nenners werden die Theile der Grundeinheit größer, und von diesen größern Theilen werden noch eben so viele, wie vorhin, genommen.

§. 34. Hieraus folgt: Ein Bruch bleibt in seinem Werthe unverändert, wenn Zähler und Nenner zugleich mit einerlei Zahl dividirt werden. Denn durch die erste Division wird der Bruch so vielmal verkleinert, als er durch die andere wieder vergrößert wird. Z. B. $\frac{9}{15}$ im Zähler und Nenner durch 3 dividirt gibt $\frac{3}{5}$ oder $\frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}$. Es ist also gleichviel, ob Jemand 9 Theile von einer Sache hat, die in 15 Theile getheilt ist, oder 3 Theile derselben Sache, wenn sie in 5 Theile getheilt ist. Ferner, man besitzt gleichviel Geld, man mag entweder $\frac{3}{4}$ fl. oder $\frac{45}{60}$ fl. d. i. 45 Kr. haben.

§. 35. Jede ganze Zahl läßt sich in einen Bruch von einem beliebigen Nenner verwandeln, dessen Zähler den Nenner so vielmal enthält, so viele Einheiten in der ganzen Zahl stecken. Denn jede ganze Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner $= 1$ ist, z. B. $5 = \frac{5}{1}$; $12 = \frac{12}{1}$ u. s. w. Man darf daher nur Zähler und Nenner mit derjenigen Zahl multipliciren, welche den neuen Nenner anzeigt. Z. B. $7 = \frac{7}{1} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 6} = \frac{42}{6}$; eben so $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{8}{4}$. Und der Bruch oder die anfänglich gegebene Zahl bleibt (wegen §. 32.) dem Werthe nach ungeändert.

§. 36. Einen Bruch aufheben heißt: ihn seiner Größe oder seines Werthes unbeschadet durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdrücken.

Durch das Heben der Brüche kann nicht nur wegen der kleinern Zahlen die Rechnung vereinfacht und erleichtert werden, sondern durch dasselbe erhält man auch deutlichere Begriffe von dem Werthe oder der Größe der Brüche, z. B. $\frac{1}{2}$ Loth ist leichter zu verstehen als $\frac{16}{32}$ Loth, obgleich beide Brüche einerlei Werth haben. Indessen können nicht alle Brüche gehoben werden, sondern nur diejenigen, welche einen gemeinschaftlichen Divisor haben.

§. 37. Eine Zahl, welche in eine andere Zahl, ohne daß ein Rest bleibt, dividirt werden kann, heißt das Maaß dieser Zahl. Eine Zahl, welche in verschiedenen andern Zahlen zugleich aufgeht, heißt das gemeinschaftliche Maaß oder der gemeinschaftliche Theiler aller dieser Zahlen.

Zahlen, welche durch kein anderes Maaß, als durch sich selbst und durch die Einheit gemessen werden können, heißen einfache Zahlen oder Primzahlen, z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. w. Mehrere Zahlen aber, welche unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, heißen Primzahlen unter sich z. B. 9, 4, 25 u. s. w.

Zahlen, welche ein Maaß haben, heißen vielfache oder zusammengesetzte Zahlen, z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 18 u. s. w. Wenn aber zwei oder mehre Zahlen so beschaffen sind, daß sie ein gemeinschaftliches Maaß besitzen, so nennt man sie zusammengesetzte Zahlen unter sich. Das gemeinschaftliche Maaß, durch dessen Division die zusammengesetzten Zahlen unter sich zu Primzahlen unter sich werden, heißt das größte gemeinschaftliche Maaß oder der größte gemeinschaftliche Theiler jener Zahlen.

§. 38. Aufg. Das größte gemeinschaftliche Maaß oder den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden.

Aufl. Man dividire die größere Zahl durch

die kleinere, und wenn die Division nicht aufgeht, mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor, und so fort, immer mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor, bis man auf eine Division kommt, welche entweder gar keinen Rest oder 1 d. h. die Einheit zum Rest gibt.

Der letztere Fall zeigt an, daß die gegebenen Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben.

Wenn aber die Division ohne allen Rest aufgehet, so wird der bei ihr gebrauchte letzte Divisor das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß der gegebenen Zahlen sein.

Beispiele: 1) Man soll für die Zahlen 1260 und 2016 das größte gemeinschaftliche Maaß suchen:

```
1260|2016|1
     1260
    ─────────
      756|1260|1
           756
          ─────────
           504|756|1
               504
              ─────────
               252|504|2
                   504
                  ─────────
                     *
```

der letzte Divisor 252 ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß von 1260 und 2016, welches in beide Zahlen ohne Rest aufgehen wird.

2) Das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 37 und 6513 zu finden:

```
37|6513|176
   37
  ─────
   281
   259
  ─────
    223
    222
   ─────
      1
```

Da hier die Division 1 zum Rest gibt, so haben beide gegebene Zahlen kein gemeinschaftliches größtes Maaß.

Der Grund des vorgeschriebenen Verfahrens

liegt darin, daß, wenn eine Zahl in einer andern aufgeht, sie nicht nur in jedem Produkt derselben aufgeht, sondern auch in jeder Zahl, die aus einem solchen Produkt und der Zahl, mit welcher man dividirt, zusammengesetzt ist. Wenn im ersten Beispiele 252 in 504 aufgeht, so geht es auch in 504 † 252 = 756; in 252 . 5 = 1260; und in 252 . 8 = 2016 auf; ferner in 756 † 504 = 1260 und in 1260 † 756 = 2016.

§. 39. Andere Beispiele zur Uebung sind folgende:

1) Welches ist das größte gemeinschaftliche Maaß oder Theiler von 504 und 5120?
2) von 37 und 2923?
3) von 3024 und 3528?
4) von 575 und 17342?
5) von 43134 und 269087?
6) von 134352 und 424980?
7) von 6709 und 350827?
8) von 24776 und 8253195?

§. 40. **Aufg.** Einen gegebenen Bruch aufzuheben.

Aufl. Man suche für Zähler und Nenner das größte gemeinschaftliche Maaß und dividire beide damit. Der Quotient beim Zähler gibt den neuen Zähler; der Quotient beim Nenner gibt den neuen Nenner. Auch wird durch ein solches Verfahren der Werth des Bruches nicht im mindesten verändert (vermöge §. 34.) Findet man kein gemeinschaftliches Maaß, so beweiset dieses, daß sich der gegebene Bruch nicht heben läßt.

Beispiel: Man soll den Bruch $\frac{1617}{4620}$ heben. Man wird das größte gemeinschaftliche Maaß 231 finden; da nun 1617 : 231 = 7 und 4620 : 231 = 20, so ist der neue Bruch $\frac{7}{20}$. Man schreibt dieß also:

231

$\frac{1617}{4620} \Big| \frac{7}{20}$

Man kann auch so verfahren, daß man kleine schickliche, gemeinschaftliche Theiler nimmt, und mit

diesen so lange dividirt, bis Zähler und Nenner Primzahlen sind. Das Produkt dieser kleinern Theiler wird dann dem größten gemeinschaftlichen Theiler oder Maaß gleich sein. So kann man in dem letzten Beispiele anstatt auf einmal mit 231 zu dividiren, nach und nach durch 3, 7, 11 dividiren. Dieser drei Zahlen Produkt gibt aber wieder die Zahl 231 oder 3. 7. 11 = 231. Das Beispiel sieht dann also aus:

$$\frac{1617}{4620} \overset{3}{\Big|} \frac{539}{1540} \overset{7}{\Big|} \frac{77}{220} \overset{11}{\Big|} \frac{7}{20}$$

§. 41. Beispiele zur Uebung. Man soll folgende Brüche aufheben:

1) $\frac{693}{792}$; 2) $\frac{945}{1512}$; 3) $\frac{195}{1456}$; 4) $\frac{252}{2315}$; 5) $\frac{221}{1190}$; 6) $\frac{20736}{31104}$; 7) $\frac{21080}{37680}$; 8) $\frac{3203}{4537}$; 9) $\frac{805}{2829}$; 10) $\frac{169}{221}$; 11) $\frac{342}{437}$; 12) $\frac{552}{575}$; 13) $\frac{87}{116}$; 14) $\frac{248}{279}$; 15) $\frac{333}{407}$; 16) $\frac{41}{492}$; 17) $\frac{6727}{29667}$; 18) $\frac{31752}{52920}$; 19) $\frac{1024}{1832}$; 20) $\frac{134352}{424980}$.

§. 42. Brüche, welche verschiedene Nenner haben, in gleichgeltende von einerlei Nenner verwandeln heißt: sie unter einerlei Benennung bringen.

§. 43. Aufg. Brüche von verschiedenen Nennern unter einerlei Benennung zu bringen.

Aufl. Man multiplicire den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit den Nennern aller übrigen Brüche: so wird man dadurch andere den gegebenen gleiche Brüche erhalten (§. 32.), welche das Produkt aus allen Nennern zu ihrem gemeinschaftlichen Nenner haben werden. Z. B.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{56}{140}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{105}{140}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{100}{140}$$

Bei diesem Verfahren entsteht bei großen und vielen Nennern ein sehr großer gemeinschaftlicher

Nenner; es läßt sich aber oft ein kleinerer finden, den man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner nennt. Es ist nämlich schon genug, wenn jeder einzelne Nenner in dem gemeinschaftlichen auch nur einmal als Faktor vorkommt; und jeder kleinere Nenner, der in einem größern steckt, braucht deßhalb ebenfalls nicht besonders als Faktor in dem gemeinschaftlichen Nenner vorzukommen. Um nun den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner sicher zu finden, zerfälle man einen jeden gegebenen Nenner in seine kleinsten Faktoren, und füge dann den Faktoren eines jeden Nenners diejenigen aus den Faktoren der andern Nenner hinzu, die ihm selbst noch fehlen. Und damit kein Bruch etwas an seinem Werthe verliere, muß man den Zähler eines jeden Bruches mit eben der Zahl multipliciren, mit welcher man den Nenner multiplicirt. Ein Beispiel wird die Sache anschaulich und deutlich machen. Man soll folgende Brüche unter einerlei Benennung bringen: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{15}$. Es ist 4 = 2. 3; 8 = 2. 2. 2 und 15 = 3. 5. Demnach

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{30}{120}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{100}{120}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{45}{120}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16}{120}$$

Nach der allgemeinen Regel wäre der gemeinschaftliche Nenner = 4. 6. 8. 15 = 2880.

Anmerkung. Ein anderes, aber in seinen Gründen dem Verstande des Anfängers nicht sogleich einleuchtendes Verfahren ist folgendes: Man streiche die Nenner, die in einem größern oder höhern ganz enthalten sind, weg; dividire die übrigen, wenigstens zu zwei und zwei, durch einen gemeinschaftlichen Theiler, und schreibe sowohl diesen Theiler, der unverändert bleiben muß,

als auch die erhaltenen Quotienten statt der dividirten Zahlen hin. Die Quotienten aber dürfen unter sich und mit den gegebenen Divisoren, wo es angeht, verkleinert werden. Endlich multiplicire man sowohl die übriggelassenen Divisoren, als auch die Quotienten durch einander. Das Produkt gibt den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. In denselben dividire man mit dem Nenner eines jeden Bruchs, und mit seinem Zähler multiplicire man den dadurch gewonnenen Quotienten. Dieses Produkt gibt den jedem Bruche zugehörigen neuen Zähler. Das vorige Beispiel wird nach diesem Verfahren also berechnet: Die Nenner sind

	4	~~6~~	~~8~~	~~15~~
3)		~~2~~	4	5
2)		1		

Das Produkt dieser Divisoren und Quotienten ist

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

als der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Man kann dann vollends also fortfahren

	120		folglich
$\frac{1}{4}$	30	30	$\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$
$\frac{5}{6}$	20	100	$\frac{5}{6} = \frac{100}{120}$
$\frac{3}{8}$	15	45	$\frac{3}{8} = \frac{45}{120}$
$\frac{2}{15}$	8	16	$\frac{2}{15} = \frac{16}{120}$

wie vorhin.

§. 44. Nicht immer können die Nenner in Faktoren zerlegt werden, wenn sie nämlich Primzahlen sind. Für diesen Fall gibt es keinen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. Man verfährt dann, wie gleich am Anfang des vorigen §. 43. ist gelehrt worden. Z. B.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{140}{210}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{168}{210}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{105}{210}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{30}{216}$$

Zur Uebung soll man folgende Brüche unter einerlei Benennung bringen:

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$
2) $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{6}{9}, \frac{2}{7}$
3) $\frac{3}{10}, \frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \frac{11}{18}$
4) $\frac{7}{20}, \frac{2}{21}, \frac{9}{30}, \frac{4}{6}, \frac{6}{33}$
5) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{13}{20}, \frac{2}{5}, \frac{13}{25}$
6) $\frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{3}{10}$
7) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{8}{11}$
8) $\frac{5}{9}, \frac{2}{17}, \frac{8}{16}, \frac{4}{5}$
9) $\frac{1}{9}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$
10) $\frac{1}{12}, \frac{9}{16}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{11}{24}$
11) $\frac{7}{22}, \frac{5}{11}, \frac{14}{55}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}$
12) $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{4}{5}, \frac{19}{32}, \frac{23}{24}$
13) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{14}{15}, \frac{7}{30}, \frac{4}{5}, \frac{19}{20}, \frac{17}{60}$
14) $\frac{5}{6}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{29}{90}, \frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{19}{30}, \frac{17}{45}, \frac{1}{2}$

§. 45. Aufg. Zu untersuchen, ob gegebene Brüche einander gleich sind, oder nicht.

Aufl. Man bringe die gegebenen Brüche zuerst unter einerlei Benennung, und dann vergleiche man ihre Zähler. Derjenige, welcher den größern Zähler hat, ist auch der größere; der andere ist der kleinere. Denn wer bei gleicher Eintheilung mehre Theile zählt, ist der größere. Z. B. $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$. Es ist nun

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \quad 7} = \frac{21}{35}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$$

also ist $\frac{3}{5}$ mehr oder größer als $\frac{4}{7}$.

§. 46. Man vergleiche die Werthe folgender Brüche:

1) $\frac{7}{8}$ und $\frac{15}{17}$
2) $\frac{5}{16}$ und $\frac{7}{23}$
3) $\frac{4}{9}$ und $\frac{15}{41}$
4) In welcher Ordnung folgen die Werthe der Brüche $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{8}$?
5) dann der Brüche $\frac{9}{16}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ und $\frac{3}{8}$?
6) endlich der Brüche $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{5}{16}$ und $\frac{6}{17}$?

§. 47. Gemischte Zahlen nennt man solche, welche aus ganzen Zahlen und Brüchen zusammengesetzt sind. Z. B. $12\frac{5}{9}$, $8\frac{1}{6}$.

§. 48. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen zu addiren.

Aufl. 1. Wenn die Brüche ungleiche Nenner haben, so bringe man sie zuerst unter einerlei Benennung. Alsdann zähle man ihre Zähler zusammen und gebe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner. Denn Brüche mit gleichen Nennern sind als Größen von einerlei Art zu betrachten, deren Menge d. h. deren sämmtliche Zähler man wissen will. Z. B.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Summe $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$

Eben so $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$

2. Bei gemischten Zahlen addire man zuerst die gegebenen Brüche, wie vorhin (Nr. 1.); alsdann die gegebenen ganzen Zahlen, und zähle zu diesen die ganzen Einheiten, welche in der Summe der Brüche etwa enthalten sind. Z. B.

$$4\frac{3}{4} = 4\frac{18}{24}$$

$$7\frac{2}{3} = 7\frac{16}{24}$$

$$10\frac{1}{8} = 10\frac{3}{24}$$

$$\frac{37}{24} = 1\frac{13}{24}$$

Summe $22\frac{13}{24}$

§. 49. Beispiele zur Uebung: 1) Was betragen $\frac{5}{6}$ Centner, $\frac{8}{9}$ Ctl. $\frac{2}{3}$ Ctl. $\frac{7}{8}$ Ctl. und $\frac{3}{5}$ Ctl. zusammen?

2) Addire: $\frac{5}{8}$ Pfund $\frac{1}{4}$ Pf. $\frac{8}{15}$ Pf. $\frac{4}{5}$ Pf.

3) Zähle $\frac{1}{8}$ Kr. $\frac{3}{4}$ Kr. $\frac{5}{6}$ Kr. zusammen.

4) Suche die Summe von $9\frac{3}{4}$ Schock, $12\frac{5}{6}$ Sch. $8\frac{1}{3}$ Sch. $15\frac{1}{2}$ Sch.

5) Zähle $12\frac{1}{2}$ Pf. $60\frac{5}{6}$ Pf. $80\frac{3}{4}$ Pf. zusammen.

6) Addire $15\frac{1}{4}$ fl. $18\frac{3}{5}$ fl. $7\frac{2}{3}$ fl. $8\frac{3}{4}$ fl. $12\frac{5}{8}$ fl. $24\frac{15}{16}$ fl.

7) Addire $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{5}{22}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$.

8) Addire $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{15}{16}$.

9) Addire $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{12}{23}$ und $\frac{9}{35}$.

10) Zähle $4\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $5\frac{7}{12}$, $13\frac{8}{9}$, $\frac{25}{27}$ und $\frac{5}{36}$ zusammen.

11) Summire $12\frac{1}{5}$, $9\frac{7}{10}$, $11\frac{1}{2}$, $2\frac{11}{20}$, $15\frac{1}{4}$ und $6\frac{5}{8}$.

12) Addire $8\frac{3}{4}$, $94\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$, $9\frac{1}{2}$, $17\frac{3}{8}$, $\frac{12}{25}$, $102\frac{19}{60}$, $52\frac{11}{18}$, $500\frac{17}{32}$, $\frac{25}{36}$, $87\frac{19}{64}$ und $205\frac{13}{24}$.

§. 50. Um eine gemischte Zahl in einen ihr gleichen Bruch zu verwandeln, multiplicire man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, addire zum Produkte den Zähler dieses Bruches und schreibe den vorigen Nenner des Bruches als Nenner darunter, z. B. $6\frac{2}{7} = \frac{6 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{44}{7}$; eben so $1\frac{13}{24} = \frac{1 \cdot 24 + 13}{24} = \frac{37}{24}$.

§. 51. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen von einander abzuziehen.

Aufl. 1. Man sorge zuerst dafür, daß die Brüche einerlei Nenner haben. Alsdann ziehe man die Zähler der Brüche von einander ab, und schreibe unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner. Denn dadurch werden Größen, deren Grundeinheit einerlei Eintheilung hat, von einander abgezogen. Z. B. von $\frac{11}{12}$ sollen $\frac{5}{12}$ abgezogen werden:

$$\begin{array}{l} \frac{11}{12} \\ \frac{5}{12} \\ \hline \text{Rest } \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Eben so

$$\begin{array}{l} \frac{7}{9} = \frac{91}{117} \\ \frac{8}{13} = \frac{72}{117} \\ \hline \text{Rest } \frac{19}{117} \end{array}$$

2. Bei gemischten Zahlen ziehe man zuerst die Brüche von einander ab, wie vorhin. (Nr. 1.); alsdann die ganzen Zahlen. Sollte sich der eine Bruch von dem andern nicht abziehen lassen: so borge man von den ganzen Zahlen eine Einheit. Diese gibt einen Bruch von gleichem Zähler und Nenner, weil $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$ u. s. w. Man muß aber den Nenner dem gemeinschaftlichen Nenner der abzuziehenden Brüche gleich machen. Z. B.

1) $18\frac{4}{5} = 18\frac{32}{40}$	2) $36\frac{1}{7} = 36\frac{3}{21}$
$7\frac{3}{8} = 7\frac{15}{40}$	$19\frac{2}{3} = 19\frac{14}{21}$
Rest $11\frac{17}{40}$	Rest $16\frac{10}{21}$

§. 52. Man berechne noch folgende Beispiele:

1) $\frac{12}{17} - \frac{9}{17}$; 2) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$; 3) $\frac{19}{25} - \frac{5}{9}$; 4) $42\frac{5}{8} - 6\frac{3}{8}$; 5) $109\frac{5}{12} - 34\frac{4}{7}$; 6) $36\frac{3}{5} - 5\frac{2}{3}$; 7) $\frac{11}{28} - \frac{17}{72}$; 8) $\frac{11}{14} - \frac{8}{21}$; 9) $\frac{113}{560} - \frac{135}{784}$; 10) $4\frac{3}{5} - \frac{13}{16}$; 11) $12 - 9\frac{5}{18}$; 12) $18\frac{3}{7} - 14$; 13) $34\frac{17}{20} - 19\frac{5}{27}$: 14) $203\frac{17}{20} - 91\frac{5}{6}$; 15) $628\frac{37}{45} - 142\frac{53}{60}$.

§. 53. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Aufl. 1. Wenn ein Bruch mit einem Bruche zu multipliciren ist, so multiplicire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Das erste Produkt gibt den neuen Zähler, das andere den neuen Nenner. Z. B.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} \text{ oder } \frac{3}{10}.$$

Nämlich $\frac{2}{5}$ soll hier nicht 3mal ganz, sondern blos mit dem vierten Theil davon genommen werden d. h. $\frac{2}{5}$ soll 3mal genommen, aber dann mit 4 dividirt werden. Das Erstere geschieht (vermöge §. 31.), indem man den Zähler (hier 2) durch 3 multiplicirt; das Andere (ebenfalls vermöge §. 31.), wenn man den Nenner (hier 5) durch 4 multiplicirt. Hieraus erhellet der Grund des Verfahrens, der an jedem andern Beispiel auf gleiche Weise nachgewiesen werden kann.

Eben so kann man auch drei und mehre Brü-

che mit einander multipliciren, z. B. $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{15}{84}$.

2. Ist der eine Faktor eine ganze Zahl, der andere ein Bruch: so multiplicire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches, und lasse den Nenner ungeändert. Der Grund davon erhellet aus §. 31.; oder man schreibe die ganze Zahl als einen Bruch, indem man ihr 1 zum Nenner gibt, und verfahre wie vorhin (Nr. 1.) Z. B.

$7 \cdot \frac{5}{13} = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$

oder $\frac{7}{1} \cdot \frac{5}{13} = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$

Eben so $\frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8} = 4\frac{1}{2}$

3. Sind beide Faktoren gemischte Zahlen: so verwandele man sie in Brüche (§. 50.) und verfahre dann nach den vorhergehenden Regeln Z. B.

$6\frac{2}{5} \cdot 4\frac{1}{3} = \frac{32}{5} \cdot \frac{13}{3} = \frac{416}{15} = 27\frac{11}{15}$

$1\frac{7}{8} \cdot 10 = \frac{15}{8} \cdot 10 = \frac{150}{8} = 18\frac{3}{4}$

§. 54. Einige Beispiele zur Uebung:

1) $\frac{9}{13} \cdot \frac{17}{25}$; 2) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{23}{24}$; 3) $132 \cdot \frac{7}{12}$; 4) $\frac{19}{21} \cdot 86$; 5) $153\frac{1}{8} \cdot \frac{16}{25}$; 6) $28\frac{4}{5} \cdot 51\frac{7}{8}$; 7) $\frac{27}{35} \cdot \frac{59}{67}$; 8) $\frac{16}{19} \cdot \frac{8}{13}$; 9) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{11}{17} \cdot \frac{19}{29}$; 10) $\frac{3}{16} \cdot 4\frac{11}{17}$; 11) $4538\frac{6}{11} \cdot \frac{19}{23}$; 12) $\frac{57}{64} \cdot 32$; 13) $9\frac{11}{12} \cdot 5\frac{3}{5}$; 14) $13\frac{5}{9} \cdot 29\frac{18}{31}$; endlich 15) $59\frac{3}{4} \cdot 59\frac{3}{4}$.

§. 55. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen durch einander zu dividiren.

Aufl. 1. Wenn ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll: so multiplicire man den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors. Das erste Produkt gibt den neuen Zähler; das andere den neuen Nenner; oder kürzer: Man kehre den Divisor um, und multiplicire mit dem umgekehrten Bruch nach obigen Regeln der Multiplikation. Z. B.

$\frac{4}{7} : \frac{3}{8} = \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{21} = 1\frac{11}{21}$

Denn mit $\frac{3}{8}$ dividiren heißt mit dem achten Theil von 3 dividiren. Wenn man daher durch 3 dividirt — welches geschieht, indem man den Nenner von $\frac{4}{7}$ mit 3 multiplicirt, §. 31. — so ist der

Quotient (hier $\frac{4}{7 \cdot 3}$) 8 mal zu klein und muß daher erst noch mit 8 multiplicirt werden; daher ist der vollständige Quotient hier $\frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 3}$ d. i. $\frac{32}{21} = 1\frac{11}{21}$. Hieraus erhellet die Richtigkeit der voranstehenden Regel.

2) Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden: so lasse man den Zähler unverändert, und multiplicire den Nenner mit der ganzen Zahl. Den Grund des Verfahrens gibt §. 31. an: oder man schreibe die ganze Zahl als einen Bruch, indem man ihr 1 zum Nenner gibt, und verfahre wie vorhin Nr. 1. Z. B.

$$\frac{6}{11} : 5 = \frac{6}{11 \cdot 5} = \frac{6}{55}$$

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9} : \frac{4}{1} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

3. Wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren ist, so tritt der erste Fall wieder ein; welches auch erhellet, wenn man die ganze Zahl als einen Bruch schreibt, dessen Nenner 1 ist. Z. B.

$$12 : \frac{2}{3} = \frac{12 \cdot 3}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

oder $12 : \frac{2}{3} = \frac{12}{1} : \frac{2}{3} = \frac{12}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{36}{2} = 18.$

4. Ist der Dividend oder der Divisor eine gemischte Zahl, oder sind beide gemischte Zahlen: so verwandele man zuerst eine jede in einen Bruch und verfahre dann nach den vorigen Regeln der Division. Z. B.

$$2\tfrac{1}{4} : 7 = \tfrac{9}{4} : 7 = \tfrac{9}{28}$$

$$16 : 8\tfrac{1}{2} = 16 : \tfrac{17}{2} = \tfrac{32}{17} = 1\tfrac{15}{17}$$

$$3\tfrac{1}{8} : 4\tfrac{2}{5} = \tfrac{25}{8} : \tfrac{22}{5} = \tfrac{125}{176}$$

§. 56. Beispiele zur Uebung:

1) $\frac{8}{9} : \frac{5}{8}$; 2) $\frac{18}{57} : \frac{67}{83}$; 3) $\frac{5}{6} : 5$; 4) $\frac{8}{9} : 12$; 5) $45 : \frac{4}{5}$; 6) $365 : \frac{3}{4}$; 7) $25\frac{3}{4} : 6$; 8) $60 : 4\frac{1}{2}$; 9) $12\frac{2}{3} : 7\frac{1}{4}$; 10) $486\frac{3}{4} : 40\frac{3}{8}$; 11) $\frac{5}{8} : \frac{6}{7}$; 12) $\frac{13}{17} : \frac{4}{11}$; 13) $6 : \frac{17}{31}$; 14) $8 : \frac{5}{19}$; 15) $\frac{12}{17} : 18$; 16) $\frac{63}{8} : 9$; 17) $\frac{8}{11} : 4\frac{6}{13}$; 18) $2\frac{3}{8} : 5\frac{7}{11}$; 19) $8\frac{3}{11} : \frac{4}{7}$; 20) $12\frac{5}{13} : 2\frac{17}{29}$.

§. 57. Brüche, deren Zähler oder Nenner, oder

beide zugleich Brüche sind, heißen **Bruchsbrüche**, z. B. $\frac{1\frac{3}{4}}{6}$ oder $\frac{\frac{7}{4}}{6}$; $\frac{9}{8\frac{2}{3}}$ oder $\frac{9}{\frac{26}{3}}$; $\frac{2\frac{1}{3}}{5\frac{1}{8}}$ oder $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{41}{8}}$. Solche Brüche können auch in ganz gewöhnlichen Rechnungen vorkommen; so hört man ja oft z. B. von einem halb Viertel $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, halb Achtel $\frac{\frac{1}{2}}{8}$ u. s. w. Man sieht aber von selbst, daß sie keine besondere Behandlung erfordern. So ist $\frac{\frac{7}{4}}{6} = \frac{7}{4} : 6 = \frac{7}{24}$ eben so $\frac{9}{\frac{26}{3}} = 9 : \frac{26}{3} = \frac{27}{26} = 1\frac{1}{26}$; ferner $\frac{\frac{7}{3}}{4\frac{1}{8}} = \frac{7}{3} : \frac{41}{8} = \frac{56}{123}$.

Drittes Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 58. Brüche, deren Nenner die Zahl 10 oder ein Produkt aus der Zahl 10 mit sich selbst ist, heißen **Decimalbrüche**. Z. B. $\frac{6}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{14}{1000}$, $\frac{3278}{10000}$, u. s. w.

§. 59. Die Decimalbrüche gewähren manche Vortheile. Denn weil der Nenner leicht kenntlich ist, so kann man ihn ganz weglassen und durch ein Komma andeuten, indem man im Zähler von der Rechten gegen die Linke durch das Komma so viele Ziffern abschneidet, so viele Nullen der Nenner hat. Enthält der Zähler weniger Ziffern als der Nenner Nullen hat: so werden ihm noch so viele Nullen **vorgesetzt**, als er braucht, um eben so viele Ziffern zu haben, als im Nenner Nullen sind. Sind keine ganzen Zahlen vorhanden, so wird vor das Komma eine Null gesetzt; wenn aber dergleichen sich vorfinden, so werden sie an die Stelle der Null vor dem Kom-

ma geschrieben. Z. B. $\frac{6}{10} = 0{,}6$; $\frac{5}{100} = 0{,}05$; $\frac{14}{1000} = 0{,}014$; $\frac{3278}{10000} = 0{,}3278$; $15\frac{7}{1000} = 15{,}007$; $8\frac{17}{100} = 8{,}17$.

Aus dieser Art, die Decimalbrüche zu schreiben, wird auch das schon gelehrte Gesetz unsers Zahlensystems wieder sichtbar, nach welchem die Ziffern von der Linken zur Rechten immer einen zehnfach geringern Werth erhalten. In der ersten Stelle nach dem Komma d. h. nach den Einern stehen die Zehntel, in der zweiten die Hundertel, in der dritten die Tausendtel u. s. w. Hält man dieses Gesetz fest im Auge, so wird man ohne Schwierigkeit vorgelegte Decimalbrüche aussprechen, und vorgesagte niederschreiben können. Denn auch hier wird wie bei ganzen diejenige Ordnung, welche fehlt, durch eine Null ersetzt. Z. B. $\frac{706}{1000} = 0{,}706$ sind 7 Zehntel, kein Hundertel und 6 Tausendtel oder kürzer: 706 Tausendtel.

Ein anderer Vortheil, der aus der Schreibart entspringt, ist der, daß die Decimalbrüche sich in den verschiedenen Rechnungen nach demselben Regeln behandeln lassen, wie die ganzen Zahlen.

§. 60. Man kann einem Decimalbruche so viele Nullen zur Rechten oder am Ende anhängen, als man nur will, ohne dadurch seinen Werth zu ändern; denn dieser hängt von den Stellen seiner bedeutenden Ziffern ab, und diese werden durch die Stelle des Komma bestimmt. Es ist also $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000$ u. s. w.

Umgekehrt kann man die am Ende befindlichen Nullen eines Decimalbruches, seines Werthes unbeschadet, wegstreichen, und es ist $2{,}450000 = 2{,}45000 = 2{,}4500 = 2{,}450 = 2{,}45$.

§. 61. Aufg. Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Aufl. Man hänge an den Zähler Nullen, dividire diesen vermehrten Zähler durch den gegebenen Nenner und schneide von dem Quotienten so viel Decimalstellen ab, als man Nullen angehängt hat. Denn um wieviel der Bruch durch die an-

fänglich angehängten Nullen vermehrt wird, um eben soviel wird er durch die hernach abgeschnittenen Stellen wieder vermindert. Man kann übrigens soviel Nullen anhängen, als man will, oder soviel als verlangt werden. Z. B.

$\frac{1}{2} = 10:2 = 0,5$

$\frac{3}{4} = 300:4 = 0,75$

$\frac{7}{8} = 7000:8 = 0,875$

§. 61. Man verwandele folgende Brüche in Decimalbrüche:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{5}{8}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{3}{16}$; 5) $\frac{1}{20}$; 6) $\frac{16}{25}$; 7) $\frac{9}{32}$; 8) $\frac{25}{64}$; 9) $\frac{1}{250}$; 10) $\frac{3}{256}$; 11) $\frac{2}{128}$; 12) $\frac{264}{625}$.

§. 63. Die Division kann mit weniger Decimalstellen, als verlangt werden, aufgehen. In diesem Fall kann man die weiter folgenden Nullen auch weglassen (§. 60.) Z. B. Man soll $\frac{4}{5}$ in einen Decimalbruch von 3 Decimalstellen verwandeln; so ist

$\frac{4}{5} = 4000:5 = 0,800 = 0,8.$

§. 64. Dagegen kann es sich treffen, daß die Division bei einer verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht aufgeht, sondern einen Rest übrig läßt. Alsdann stellt der Decimalbruch den gemeinen Bruch nicht ganz dar. Ja es gibt Brüche, die sich nie vollkommen in einen Decimalbruch verwandeln lassen, so viele Nullen man auch dem Zähler anhängt. Solche Brüche nennt man unendliche oder auch periodische Decimalbrüche, und man erkennt sie daran, daß sie bei der Verwandelung oder Division entweder immer die nämliche Ziffer wiederholen, oder immer zwei, drei, auch mehre gleiche Ziffern, oder endlich nach einer, zwei, auch mehr ungleichen Ziffern immer eine Anzahl gleicher Ziffern zum Vorschein bringen. In einem solchen Falle nimmt man so viele Decimalstellen, daß der noch fehlende Theil als unbedeutend in der Anwendung bei Seite gesetzt werden kann. Man pflegt solche unvollständige Brüche durch einige Punkte zu bezeichnen, die man ihnen am Ende beifügt. Z. B.

$\frac{2}{3} = 20000 : 3 = 0,6666....$

$\frac{8}{9} = 800000 : 9 = 0{,}88888\ldots$

$\frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots$

$\frac{8}{27} = 0{,}296296\ldots$

$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$

$\frac{7}{48} = 0{,}1458333\ldots$

§. 65. Man verwandele noch folgende Brüche in Decimalbrüche, und zwar auf 8 Decimalstellen:

1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{3}{11}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{1}{15}$; 5) $\frac{17}{19}$; 6) $\frac{7}{24}$; 7) $\frac{3}{35}$; 8) $\frac{1}{423}$; 9) $\frac{31}{345}$; 10) $\frac{3}{692}$; 11) $\frac{987}{10201}$; 12) $\frac{413}{103212}$.

§. 66. Aufg. Decimalbrüche zu addiren.

Aufl. Man setze die Decimalen von gleicher Ordnung unter einander, nämlich Zehntel unter Zehntel, Hunderttel unter Hunderttel, Tausendtel unter Tausendtel u. s. w. Alsdann zähle man die unter einander stehenden Zahlen wie ganze Zahlen zusammen, rechne jedesmal den Zehner, der in der Summe einer Reihe heraus kömmt, zur folgenden Reihe und setze in der Summe das Komma, wodurch die Decimalen abgeschnitten werden, unter die Kommata der summirenden Zahlen. Denn auf diese Weise erhält man alle Zehntel, Hunderttel u. s. w., die in den summirenden Zahlen enthalten sind. Z. B.

14,385	0,875
0,4003	0,062
0,5	0,33
326,0078	0,4754
8,033	0,108
349,3261	1,8504

Es versteht sich von selbst, daß unvollständige oder unendliche Decimalbrüche auch nicht die volle Summe der ihnen zugehörigen Brüche darstellen können. Z. B.

$\frac{4}{7} = 0{,}5714\ldots$

$\frac{3}{7} = 0{,}4285\ldots$

$0{,}9999\ldots$

Aber aus §. 75. II. lernen wir, daß $0{,}9999\ldots = 1$ ist, wie auch $\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$ ist.

§. 67. Andere Beispiele der Addition zur Uebung sind folgende:

1) 6,3409	2) 23,981
4,5001	0,097
0,007	5,271
18,3	106,04

3) 86,291	4) 28,597
37,456	512,78
0,704	6,0235
752,004	54,896
	485,0026

5) 3208,14	
21 0036	6) 78,4132
7,254	6,14805
113,09	0,004
0,708	127,348818
24,0007	0,617
	94,000264

§. 68. Aufg. Decimalbrüche von einander abzuziehen.

Aufl. Man schreibe die Zahlen so unter einander, wie bei der Addition der Decimalbrüche (§. 66.), und wenn sie eine ungleiche Anzahl von Decimalstellen haben, so hänge man (vermöge §. 60.) demjenigen, der weniger hat, so viele Nullen an, als ihm abgehen. Alsdann verrichte man die Subtraktion wie bei ganzen Zahlen, und setze das Komma in dem Reste unter die Kommata des Minuenden und Subtrahenden. Die Richtigkeit des Verfahrens wird einem Jeden von selbst einleuchten. Beispiele:

0,87352	36,04500
0,32881	8,12634
0,54471	27,91866

3,476802	12,0875
0,8039	11,637642
2,672902	0,449858

§. 69. Zur Uebung im Abziehen der Decimalbrüche mögen noch folgende Beispiele dienen:

1) 37,456 0,394	2) 14,03456 9,74082
3) 0,876 0,0093864	4) 28,1270453 15,00913
5) 458 396,4578	6) 13,04728 8,35629

§. 70. Aufg. Decimalbrüche mit einander zu multipliciren.

Aufl. Man schreibe die Faktoren, wie beim Multipliciren ganzer Zahlen, unter einander, ohne auf die Kommata Rücksicht zu nehmen, und verrichte nun die Multiplikation wie mit ganzen Zahlen. In dem Hauptprodukte schneide man so viele Decimalstellen ab, so viele beide Faktoren zusammen genommen haben.

Enthält das Produkt nicht so viele Ziffern, als nöthig sind, um die gehörige Anzahl von Decimalstellen abschneiden zu können: so setze man demselben so viele Nullen vor, daß das Verlangte geschehen kann. Z. B.

0,38406 0,23 115218 76812 0,0883338	76,103 442 152206 304412 304412 33637,526
0,000718 23 2154 1436 0,016514	8,00005 0,029 7200045 1600010 0,23200145

Dieses Verfahren hat seinen Grund darin, daß

jeder Decimalbruch soviel Ziffern enthalten muß, als der Nenner Nullen hat (§. 59.) Durch die Multiplikation zweier Decimalbrüche bekommt aber der Nenner des Produkts eigentlich soviele Nullen, als beide Faktoren zusammen genommen haben (§. 19). Darum müssen auch im Produkte soviele Decimalen abgeschnitten werden, als beide Faktoren zusammen genommen enthalten. Anschaulich wird die ganze Sache, wenn man die Decimalbrüche wie gemeine Brüche schreibt und behandelt. Z. B. 0,126 $\times$ 8,4 $= \frac{126}{1000} \times 8\frac{4}{10} = \frac{126}{1000} \times \frac{84}{10} = \frac{10584}{10000}$ = 1,0584.

§. 71. Zur Einübung des Multiplicirens mit Decimalbrüchen können folgende Beispiele dienen:

1) 1,478 $\times$ 0,2 gibt
2) 5,4103 $\times$ 0,9
3) 2,35704 $\times$ 0,03
4) 57,694 $\times$ 0,0001
5) 7,21 $\times$ 0,35
6) 0,15 $\times$ 0,006
7) 2,325 $\times$ 4,23
9) 3,1415 $\times$ 25,4
10) 328,06743 $\times$ 0,526
11) 8,90757 $\times$ 86,95
12) 14,52 $\times$ 36
13) 785439 $\times$ 0,128
14) 74938,5261 $\times$ 4,008
15) 4,5 $\times$ 36 $\times$ 0,004 $\times$ 7,48

§. 72. Aufg. Decimalbrüche durcheinander zu dividiren.

Aufl. Ohne Rücksicht auf die Kommata zu nehmen, dividire man die Decimalbrüche wie ganze Zahlen, und schneide im Quotienten so viele Decimalstellen ab, um wie viel die Anzahl der Decimalen des Dividenden größer ist, als die Anzahl der Decimalen des Divisors.

Hat der Divisor mehr Decimalen als der Dividend, so hänge man letzterem zur Rechten so viele Nullen an, daß er zum wenigsten soviele Decimalen hat als der Divisor.

Wenn der Divisor und Dividend gleich viele Decimalstellen haben, so wird der Quotient eine ganze Zahl.

Beispiele:

```
2,44|83,2528(34,12        48|98,784(2,058
     732                     96
    ----                    ----
     1005                    278
      976                    240
     ----                    ----
      292                    384
      244                    384
     ----                    ----
      488                     *
      488
     ----
       *

0,0036|59,4(16500         1,12|311,36(278
       36                      224
      ----                     ----
       234                     873
       216                     784
      ----                     ----
       18000                   896
       180                     896
      ----                     ----
        *                       *
```

Der Grund des Verfahrens erhellet daraus, wenn man die Decimalbrüche als gemeine Brüche schreibt und dann nach den Regeln der Division mit Brüchen verfährt. Der Nenner des Divisors wird dadurch zu einem Zähler, und es heben sich nun im Nenner des Dividenden so viele Nullen auf, als der Divisor hat. Der Nenner des Quotienten wird also immer so viele Nullen enthalten, so viele der Nenner des Dividenden deren mehr hat als der Divisor. Die Anzahl der Nullen des Nenners aber ist der Anzahl der Ziffern des ganzen Decimalbruchs gleich. Z. B. $14,1255 : 43 = 14\frac{1255}{10000} : 4\frac{3}{10} = \frac{141255}{10000} : \frac{43}{10} = \frac{141255}{100000} \times \frac{10}{43} = \frac{141255}{43} \times \frac{10}{100000} = 3285 \times \frac{1}{1000} = 3,285.$

Eben so $311,36 : 1,12$ $311\frac{36}{100} : 1\frac{12}{100} = \frac{31136}{100} : \frac{112}{100} = \frac{100}{112} \times \frac{100}{111} = \frac{3113600}{11200} = \frac{31136}{112} = 278.$

§. 73. **Wenn ein Rest bleibt, so ist der Quo-**

tient nicht vollständig; will man ihn genauer haben, so hänge man dem Reste Nullen an und setze die Division fort. Jede neu angehängte Null gilt für eine neue Decimalstelle des Dividenden, worauf man also bei der Bestimmung der Decimalen im Quotienten Rücksicht nehmen muß. Z. B.

```
18|213,57|11,865
   18
   ---
    33
    18
   ---
    155
    144
   ---
     117
     108
    ---
      90
      90
     ---
       *
```

```
712|30582|42,95....
    2848
    ----
     2102
     1424
     ----
     6780
     6408
     ----
      3720
      3560
      ----
       160
```

Dieß läßt sich auch anwenden, wo Ganze durch Ganze dividirt werden, wie das zweite Beispiel lehrt.

§. 74. Man übe sich nun in folgenden Beispielen der Division mit Decimalbrüchen:

1) 8,24967 : 1,43 gibt
2) 4,2742995 : 9,355
3) 4565,33 : 59,29
4) 129,6 : 0,072
5) 0,01728 : 36
6) 37,8 : 45
7) 4,32852 : 0,00042
8) 2,421045 : 1,2045
9) 0,0707112 : 2,35704
10) 0,6214806 : 0,18
11) 3,7 : 0,14
12) 4000 : 5,1336
13) 0,8837207 : 17,569
14) 426,240711284 : 32,76859
15) 73,1478996 : 0,0046302

§. 75. Aufg. **Einen Decimalbruch in den ihm gleichen gemeinen Bruch zu verwandeln.**

Aufl. I. Wenn der Decimalbruch ein vollständiger ist, so schreibe man ihn als einen gemeinen Bruch, und verkleinere ihn alsdann, wenn es möglich ist. Z. B.

$0,785 = \frac{785}{1000} = \frac{7}{8}$ (§. 40.)

$0,9375 = \frac{9375}{10000} = \frac{15}{16}$.

II. Wenn aber der Decimalbruch ein periodischer ist, so rücke man das Komma um so viele Stellen von der Linken zur Rechten, als die Periode Ziffern enthält, und ziehe den gegebenen Bruch von diesem neuen ab, nachdem man beiden eine gleiche Anzahl Decimalstellen gegeben hat. Der Rest ist der Zähler des zu suchenden gemeinen Bruches, dem man zum Nenner so viele Neuner (9....) gibt, als in der Periode Ziffern enthalten sind. In dieser Gestalt verkleinere man ihn, wenn es angeht, und gebe ihm überhaupt die gehörige Form. Z. B. Es seien die vorgelegten periodischen Decimalbrüche 0,666....; 0,090909....; 0,296296....; 0,1666....; 0,1458333...., so geschieht ihre Verwandlung also: Da 0,666... nur eine Ziffer in der Periode hat, so schreibt man 6,66... und zieht davon 0,66... ab. Der Rest ist 6, dem man hier auch nur Eine Neun (9) zum Nenner gibt. Demnach

$0,666..., = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Aus 0,090909..... wird 9,0909.... davon 0,0909.... abgezogen, läßt 9 zum Rest, als den neuen Zähler, welcher, weil die Periode zwei Ziffern hat, auch zwei Neuner (99) zum Nenner erhält. Also

$0,0909 ... = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.

Aus 0,296296.... bekommt man 296,296.... und 296,296... — 0,296.... = 296. Folglich

$0,296296.... = \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$

Aus 0,1666.... wird 1,666.... und nun 1,666... — 0,166... = 1,5. Daher

$0,1666.... = \frac{1,5}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

Hier mußte erst aus dem Zähler des neuen Bru-

ches das Komma weggeschafft werden, indem man Zähler und Nenner durch 10 multiplicirte.

Aus 0,1458333.... wird 1,458333.... und 1,458333.... — 0,145833.... = 1,3125. Folglich 0,1458333.... = $\frac{1,3125}{9}$ = $\frac{13125}{90000}$ = $\frac{7}{48}$.

Hier wurde das Komma aus dem Zähler dadurch weggeschafft, daß man Zähler und Nenner durch 10000 multiplicirte.

Nun wird man auch gleich finden, daß 0,9999.... = $\frac{9}{9}$ = 1 ist.

§. 76. Wie vortheilhaft und bequem öfters die Rechnung mit Decimalbrüchen, besonders in Vergleich mit den gemeinen Brüchen, sei, kann man leicht wahrnehmen, wenn man folgende Brüche: $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{13}{20}$ und $\frac{22}{29}$ einmal nach §. 48. addirt, und das anderemal in Decimalbrüche (nach §. 61.) verwandelt und dann gleichfalls (nach §. 68.) addirt. Die erste Verrichtung wird höchst mühsam, die andere sehr leicht von statten gehen.

Viertes Kapitel.

Die vier Species in benannten Zahlen.

---

§. 77. Eine Zahl, bei welcher man einzig und allein die Menge ihrer Einheiten betrachtet, heißt eine unbenannte Zahl, z. B. 12. Wenn man sie aber auf einen bestimmten Gegenstand beziehet oder anwendet, so heißt sie benannt, z. B. 12 Gulden, oder 12 Pfunde u. s. w.

§. 78. Die Rechnungen in benannten Zahlen sind nicht als neue oder abweichende zu betrachten; denn 36 + 24 = 60, ob die Zahlen 36, 24, 60 sich auf bestimmte Gegenstände beziehen oder nicht.

Nur kömmt es bei diesen Rechnungen in benannten Zahlen häufig vor, daß Größen einer Art in Größen einer andern verwandelt werden müssen, z. B. Kreuzer in Gulden, Lothe in Pfunde u. s. w. oder umgekehrt Gulden in Kreuzer, Centner in Pfunde u. s. w. Das Verfahren, wodurch dieses geschieht, heißt das Reduciren der einen Größe auf die andere.

§. 79. Die Einheit einer Größe, welche mehre Einheiten einer andern Art von Größe enthält, wollen wir die höhere Einheit nennen; und die Einheit einer Größe, von welcher mehre Einheiten auf die Einheit einer andern Art von Größe geben, soll die niedrigere heißen. Um nun Größen in einander verwandeln zu können, muß man wissen, wie viel niedrigere Einheiten eine größere Einheit enthält, oder wie viele niedrigere Einheiten in einer größern enthalten sind. Das Allgemeinste davon ist:

1 fl. rheinl. = 60 Kr.; 1 Kr. = 4 Pf.; 1 Pf. = 2 Heller; oder 1 fl. = 16 gute Gr. und 1 g. Gr. = 3 Kr. 3 Pf.; oder 1 fl. = 20 leichte Gr.; 1 l. Gr. = 3 Kr.; oder 1 fl. = 12 gute Batzen; 1 g. Batzen = 5 Kr.; oder 1 fl. = 15 leichte Batzen; 1 leichter Batzen = 4 Kr.

1 Rthlr. (Reichsthaler) = 90 Kr. = 24 gute Groschen.

1 Thlr. in Preußen und Sachsen hält 24 Groschen; 1 Groschen hat 12 Pfennige.

1 Mark in Hamburg beträgt 16 Schillinge, und 1 Schilling 12 Pfennige.

1 Laubthlr. = 2 fl. 45 Kr.; 1 Kronenthlr. = 2 fl. 42 Kr.; 1 Konventthlr. = 2 fl. 24 Kr.

5 Konventthlr. = 12 fl. rheinl.; und 10 Kronenthlr. = 27 fl. rheinl.

1 preußl. Thlr. = 1 fl. 45 Kr. rheinl.; 1 sächs. Thlr. = 1 fl. 48 Kr. rheinl. und 5 sächs. Thaler betragen 9 fl. rhl.

1 Dukaten = 5 fl. 24 Kr. im Durchschnitt; 1 Louisdor = 9 fl. rhl.; 1 Karolin = 11 fl. rheinl.

1 Ctl. = 100 Pf.; in einigen Ländern = 110 Pfd.; 1 Pfd. = 32 Loth; 1 Loth = 4 Quint oder Quentchen; 1 Quint = 4 Pfennige.

1 Mark Gold = 16 Loth; 1 Loth = 1½ Karat; 1 Karat = 12 Grän; oder 1 Loth = 18 Grän.

1 Mark Silber = 8 Unzen; 1 Unze = 2 Loth; 1 Loth = 18 Grän.

1 Pfund Apothekerwaare = 12 Unzen; 1 Unze = 8 Drachmen; 1 Drachme = 3 Skrupel; 1 Skrupel = 20 Gran.

1 Ballen Papier = 10 Ries; 1 Ries = 20 Buch; 1 Buch = 24 Bogen.

1 Ohm = 2 Eimer; 1 Eimer = 60 Maaß; 1 Maaß = 2 Seidel; und 1 Seidel = 2 Quart. Die baierische Maaßkanne enthält 43 Decimalkubikzoll.

Die baierische Elle hält 2 Fuß und 10½ baierische Duodecimalzoll.

Ein baierisches Tagwerk oder Jauchert ist 200 Fuß lang und eben so breit, und hält 4000 Quadratfuß.

Die baierische Holzklafter beträgt 126 bairische Kubikfuß, und die gesetzmäßige Scheiterlänge ist 3½ Fuß.

1 (baierisch.) Scheffel = 6 Metzen = 208 (baier.) Schenkmaaß; 1 Metzen = 34⅔ Schenkmaaß oder Maaßkannen.

1 Simmra = 16 Meeß.

1 Malter = 8 Metzen.

1 alter römischer Sestertius nach seinem mittlern Werthe = 6 Kr. Demnach gehen 10 Sestertien auf 1 fl. und 1000 Sestertien d. i. ein Sestertium = 100 fl. Ferner 1 Silberdenar = 24 Kr. und 1 Golddenar 10 fl.

1 griechischer Obol = 4,25 Kr.; 1 Drachme = 25,5 Kr.; 1 Mine = 42,5 fl. und 1 Talent = 2551,68 = fl.

Für Angaben aus dem Mittelalter ist zu merken:

1 ℔ Heller = 4 fl.

1 ℔ neuer Heller oder 1 ℔ Silbers = 30 Rthlr.

1 Schock böhmische Groschen = 4 fl.

1 Schock sächsische Groschen = 20 Groschen meißnisch.

Mehre Angaben über Münzen, Maaße und Gewicht verschiedener Oerter und Länder siehe in den angehängten Tabellen.

§. 80. Kennt man nun die verschiedenen Eintheilungen aller Größen, so hat es gar keine Schwierigkeit, die verschiedenartigen Größen in einander zu verwandeln. Nämlich

1) um Größen einer niedrigern Art in Größen einer höhern Art zu verwandeln, dividire man die gegebene Menge der niedrigern Einheiten durch die Zahl, welche angibt, wie viele niedrigere Einheiten in einer größern Einheit enthalten sind. Z. B. wie viel Gulden machen 37108 Kr. aus?

```
60|37108|618 fl.
   36 6
   ----
    11
     6
    ----
     50
     48
    ----
     28 Kr. bleiben zum Rest.
```

d. h. 37108 Kr. = 618 fl. 28 Kr.

2) Um eine Menge von Größen irgend einer Art in Größen einer kleinern Art zu verwandeln, multiplicire man die gegebene Menge der größern Art mit der Zahl, welche angibt, wie viele niedrigere Einheiten Eine höhere in sich enthält. Z. B. 14 Pfund sollen in Lothe verwandelt werden; so erhält man

```
   14
   32
  ----
   28
  42
  ----
  448 Lothe sind in 14 Pfunden enthalten.
```

§. 81. Aufg. Benannte Zahlen zu addiren.

Aufl. Man schreibe die Größen von einerlei Art nach den bisherigen Grundsätzen gehörig unter

einander, und zwar die niedrigste Art in die erste Kolumne zur Rechten, und dann immer die nächsthöhere in die nächstfolgende Kolumne. Alsdann zähle man, von der niedrigsten Art anfangend, die Zahlen einer jeden Art zusammen; und wenn die Summe der kleinern Einheiten auch Einheiten der nächsthöhern Art enthält, so verwandele man sie in dieselben, und schreibe nur den Rest unter die kleinern Einheiten; die größern zähle man zu den nächstfolgenden Einheiten. Z. B.

fl.	Kr.	Pf.
3100	18	3
45	7	1
1856	—	2
690	36	—
5692 fl.	2 Kr.	2 Pf.

Ctl.	Pfd.	Lth.
8	—	16
12	24	$7\frac{1}{3}$
—	58	$2\frac{1}{2}$
16	29	—
37 Ctl.	11 Pf.	$25\frac{5}{6}$ Loth.

§. 82. Beispiele zur Uebung im Addiren sind:

1)

Thlr.	Gr.	Pf.
2148	17	$3\frac{1}{4}$
506	—	10
4223	12	$8\frac{2}{3}$
15	20	—
691	8	$5\frac{3}{8}$
3079	14	6

2)

Ctl.	Pfd.
403	$16\frac{2}{5}$
18	3
642	$28\frac{7}{9}$
—	25
1227	$4\frac{1}{3}$
315	$7\frac{5}{8}$

3)

Mark	Schillinge	Pf.
1346	12	$5\frac{1}{8}$
4429	6	$7\frac{1}{3}$
563	10	—
2071	3	$2\frac{3}{5}$
60782	8	—
146	4	$8\frac{4}{7}$
7198	—	$4\frac{1}{4}$
41927	—	2
3539	14	$9\frac{5}{8}$

4)

Scheffel	Metzen
17	$3\frac{2}{5}$
108	5
—	$4\frac{4}{9}$
20	$1\frac{2}{7}$
46	—
302	$5\frac{1}{2}$
87	$1\frac{7}{12}$
35	—
408	$2\frac{5}{6}$

§. 83. Aufg. Benannte Zahlen von einander abzuziehen.

Aufl. Man schreibe die Zahlen einer jeden Art, wie vorhin bei der Addition, gehörig unter

einander, fange das Abziehen bei der kleinern Art an und schreite so fort bis zu der größten, damit man nöthigenfalls eine größere Einheit zu den geringern borgen kann. Dabei übersehe man nicht, daß die geborgte Einheit nicht, wie bei unbenannten Zahlen, gerade 10 Einheiten der nächstniedrigern enthalten müsse, sondern nach Verschiedenheit der Größen einen verschiedenen Werth hat. Denn wenn man von Gulden eine Einheit zu Kreuzern borgt, so bedeutet dieser Gulden natürlich 60 Kr.; eben so 1 Loth, zu Quinten geborgt, gilt 4 Quinte u. s. w. Beispiele:

Thlr.	Gr.	Pf.	Pf.	Lth.	Q.
614	17	$3\frac{1}{8}$	13	2	2
400	20	$1\frac{4}{5}$	7	15	3
213 Thlr.	21 Gr.	$1\frac{13}{40}$ Pf.	5 Pfd.	18 Lth.	3 Q.

Wie alt war Jemand am 30. Januar 1814, welcher den 6. Mai 1780 geboren ist? Hier muß man die Zeit der Geburt von der Jahreszahl abziehen, in welcher man nach seinem Alter fragt.

Jahre	Monate	Tage
1813	—	30
1779	4	6
33 Jahre	8 Monate	24 Tage

nämlich am 30. Januar ist noch kein Monat im Jahre verflossen, sondern erst 30 Tage; und am 6. Mai zählt man 4 Monate und 6 Tage des Jahrs. Ueberdieß ist das Jahr 1814 erst mit dem letzten December geendigt; eben so auch das Jahr 1780. Darum muß man 1813 anstatt 1814, und 1779 anstatt 1780 ansetzen.

Wie alt war die nämliche Person am 4. Juli 1818?

Jahr	Monate	Tage
1817	6	4
1779	4	6
38 Jahre	1 Monat	28 Tage.

§. 84. Beispiele im Abziehen benannter Zahlen sind:

1) fl.	Kr.	Pf.	2) Ctl.	℔	Loth
5263	49	2	152	13	$8\frac{4}{7}$
814	56	3	67	42	$15\frac{8}{9}$

3) Wie alt ist eine Person geworden, welche am 7. Julius 1742 geboren worden, und den 19. September gestorben ist?

4) Friedrich der Einzige wurde geboren 1712 den 24. Januar, und starb den 17. August 1786. Wie alt ist er geworden?

§. 85. Aufg. Eine benannte Zahl mit einer unbenannten zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire einen jeden Theil des Multiplikanden besonders mit dem Multiplikator, so daß man von den niedrigern Einheiten anfängt und zu den höhern fortschreitet, und verwandele die niedrigern nöthigen Falls in höhere, und addire diese zum Produkte der nächsthöhern; die übrigbleibenden niedern aber werden unter ihre gehörigen Einheiten gesetzt. Z. B. wie viel betragen 470 Kronenthaler, wenn ein jeder 2 fl. 42 Kr. gilt?

	fl.	Kr.
	2	42
		(470
	940 fl.	19740 Kr.
oder	1269 fl.	— Kr.

Was wiegen 6 Kisten zusammen, wenn jede 2 Ctl. 14 Pfd. und 15 Loth schwer ist?

	Ctl.	Pfd.	Lth.
	2	14	15
			(6
	12 Ctl.	84 Pfd.	90 Lth.
oder	12 Ctl.	86 Pfd.	26 Loth.

§. 86. Uebungsbeispiele für die Multiplikation mit benannten Zahlen.

1) Es sind 8 Personen vorhanden; an jede soll 1 fl. 45 Kr. ausgezahlt werden. Wie viel beträgt dieß?

2) Jedem von 17 Alumnen soll 1 Thlr. 8

Gr. 3 Pf. bezahlt werden; wie viel macht das Ganze?

3) Ein Fuhrmann ladet 10 Kisten ab; in jeder befinden sich 3 Ctl. 45 Pf. und $5\frac{3}{8}$ Loth. Wie viel an Gewicht macht Alles?

4) An 7 verunglückte Gemeinden soll Getraide abgegeben werden, und zwar an jede 86 Scheffel $4\frac{3}{8}$ Metzen. Wie viel beträgt das Ganze?

5) In Hamburg sollen 38 Schillinge und 3 Pfennige $32\frac{1}{8}$ mal ausbezahlt werden. Dieß beträgt?

6) 13 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Gr. durch $9\frac{5}{8}$ multiplicirt. Wie viel macht dieß?

§. 87. Aufg. Eine benannte Zahl durch eine unbenannte zu dividiren.

Aufl. Man dividire jeden Theil des Dividenden von den höchsten Einheiten an stufenweise bis zu den niedrigsten und schreibe jeden Quotienten unter die ihm zugehörigen Einheiten. Wenn irgendwo ein Rest bleibt, so verwandele man ihn sogleich in die nächstniedrigen Einheiten und zähle sie zu denen, zu welchen sie gehören; die dadurch erhaltene Zahl dividire man statt des einzelnen gegebenen Theils des Dividenden. Z. B. Es haben sich 12 Personen in 100 Thlr. 19 Gr. und 6 Pf. zu theilen; wie viel erhält jede?

	Thlr.	Gr.	Pf.
12	100	19	6
	8 Thlr.	9 Gr.	$7\frac{1}{2}$ Pf. erhält jede Person.

§. 88. Andere Beispiele für die Division benannter Zahlen sind:

1) Es haben sich 16 Alumnen in 65 fl. rhl. zu theilen; wie viel kommt auf jeden?

2) Man soll 4 Thlr. 7 Gr. 9 Pf. unter 8 Personen vertheilen. Was trifft die Person?

3) Wie groß ist der 12te Theil von 83 Ctr. 64 Pfd. und $15\frac{1}{3}$ Loth?

4) An 15 abgebrannte Familien werden 36 Scheffel $3\frac{3}{4}$ Metzen Roggen abgeliefert zur gleichheitlichen Vertheilung. Wie viel kommt auf 1 Familie?

§. 89. Die Probe über die Rechnungen in benannten Zahlen wird eben so gemacht, wie bei den Rechnungsarten in unbenannten Zahlen; daher ist es nicht nöthig, hier noch besonders davon zu handeln.

Fünftes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf die Regel de tri, de quinque ꝛc., Kettenregel, Gesellschafts- und Vermischungs-Rechnung.

Verhältnisse und Proportionen.

§. 90. Wenn man zwei Zahlen mit einander vergleicht, und nachsieht, wie viele Einheiten die eine mehr hat als die andere, so betrachtet man dieser Zahlen arithmetisches Verhältniß; wenn man aber untersucht, wie vielmal oder wie oft die eine Zahl die andere in sich enthält, so hat man ihr geometrisches Verhältniß. Z. B. der Zahlen 20 und 5 arithmetisches Verhältniß ist $20 - 5 = 15$, und ihr geometrisches ist $\frac{20}{5}$ oder $20 : 5 = 4$.

§. 91. Man sieht, daß das arithmetische Verhältniß durch die Subtraktion, das geometrische aber durch die Division bestimmt wird. Und in der That sind auch arithmetische Verhältnisse nichts anders als Unterschiede, und geometrische nichts anders als Quotienten oder Brüche. Darum hat man auch die nämliche Bezeichnung beibehalten; und was von den Quotienten oder Brüchen gilt, das wird auch von den geometrischen Verhältnißen gelten.

§. 92. Die Zahlen, welche mit einander verglichen werden, heißen die Glieder des Verhältnisses, und zwar die erste das vorhergehende

oder das Vorderglied, und die zweite das nachfolgende oder das Hinterglied. Diejenige Zahl, welche die Größe des Verhältnisses ausdrückt, heißt überhaupt der Verhältnißname, und insbesondere bei dem arithmetischen Verhältniße der Unterschied, und bei dem geometrischen der Exponent. So ist z. B. in 15 — 3 die Zahl 12 der Unterschied, und in 15 : 3 ist 5 der Exponent.

§. 93. Arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn die Unterschiede ihrer Glieder einander gleich sind; und geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Exponenten einander gleich sind. So sind z. B. 13 — 6; 21 — 14 und 56 — 49 gleiche arithmetische Verhältnisse; eben so sind 18 : 6 und 42 : 14 gleiche geometrische Verhältnisse.

§. 94. Zwei gleiche Verhältnisse bilden zusammen eine Proportion, welche demnach sowohl eine arithmetische als eine geometrische sein kann, je nachdem die zusammengestellten Verhältnisse arithmetische oder geometrische sind. Jede enthält vier Glieder, von denen das erste und vierte die äußern, das zweite und dritte aber die mittlern Proportionalglieder heißen. Z. B. 14 — 6 = 23 — 15 ist eine arithmetische, und 12 : 6 = 18 : 9 ist eine geometrische Proportion.

Sind die mittlern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion stetig oder zusammenhängend; im entgegengesetzten Falle aber abgesondert oder getrennt. Die vorigen Proportionen sind abgesonderte; aber 20 — 16 = 16 — 12; eben so 36 : 12 = 12 : 4 sind stetige.

Wenn übrigens von Verhältnissen oder Proportionen schlechtweg die Rede ist, ohne daß arithmetische ausdrücklich genannt werden: so sind gewöhnlich geometrische zu verstehen.

§. 95. Grundsatz. Gleiche Größen auf gleiche Art abgeändert, bleiben auch nach dieser Aenderung einander gleich.

§. 96. Satz. In jeder arithmetischen Propor-

tion ist die Summe der äußern Glieder eben so groß als die Summe der mittlern.

Beweis. Das erste Glied hat eben so viele Einheiten mehr oder weniger als das zweite, so viele das letzte weniger oder mehr enthält als das dritte. Um so viel also das eine der äussern Glieder das eine der mittlern an Größe übertrifft, um eben so viel wird das andere der äußern Glieder von dem andern der mittlern an Größe übertroffen; folglich muß die Summe von beiden gleich groß sein. Z. B. $8 - 5 = 14 - 11$ und $8 + 11 = 5 + 14$; eben so $7 - 9 = 4 - 6$ und $7 + 6 = 9 + 4$.

§. 97. Umgekehrt findet eine arithmetische Proportion statt, wenn vier Zahlen so beschaffen sind, daß die Summe der äußern und mittlern Glieder einander gleich ist, z. B. 1, 5, 6, 10.

§. 98. In einer stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittlern; denn $16 - 12 = 12 - 8$ und $16 + 8 = 12 + 12 = 2 \cdot 12$.

§. 99. Man findet also das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion, wenn man die Summe der beiden äußern Glieder halbirt, z. B. zwischen 16 und 8 ist das mittlere Glied $= \frac{16 + 8}{2} = \frac{24}{2} = 12$ wie vorhin §. 98.

§. 100. Das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion nennt man auch das arithmetische Mittel. Und diesen Ausdruck gebraucht man noch in weiterm Sinne, und versteht darunter gleichsam eine mittlere Zahl zwischen mehren andern, nämlich diejenige Zahl, die man findet, wenn man die gegebenen addirt und ihre Summe durch die Anzahl der Zahlen dividirt. Hievon macht man im Leben häufig Gebrauch, z. B. wenn man die mittlern Einkünfte eines Gutes, Amtes, Gewerbes, die mittlere Anzahl der Gebornen, Gestorbenen in einem Orte oder Lande wissen will. Ein Gut z. B. trage in 6 Jahren nacheinander folgende Einkünfte: 451, 622, 487, 536, 395, 474 fl.

Dieß gibt auf alle 6 Jahre zusammen 2965 fl. Einkünfte, folglich im Mittel auf Ein Jahr $494\frac{1}{6}$ fl.

§. 101. Beispiele für Fälle, wo zwischen mehren Zahlen eine mittlere gesucht werden soll, sind:

1) Ein Gewerb bringt in 10 Jahren nacheinander alljährlich ein: 1) 736 fl. 2) 689 fl. 3) 496 fl. 4) 532 fl. 5) 718 fl. 6) 745 fl. 7) 671 fl. 8) 800 fl. 9) 805 fl. 10) 683 fl. Wie viel ist auf Ein Jahr im Durchschnitt zu rechnen?

2) Ein Amt trägt 8 Jahre nacheinander Folgendes ein: 1) $935\frac{1}{2}$ fl. 2) $788\frac{2}{3}$ fl. 3) 814 fl. 4) $920\frac{5}{7}$ fl. 5) $942\frac{1}{8}$ fl. 6) 895 fl. 7) $913\frac{2}{8}$ fl. 8) $836\frac{1}{8}$ fl. Wie viel kann man auf jedes Jahr im Durchschnitt rechnen?

3) Ein Kaufmann hat in einer Woche an Waaren verkauft: Sonntags für 12 Thlr. 8 Gr. 1 Pf.; Montags für 15 Thlr 7 Gr. 3 Pf.; Dienstags für 18 Thlr. 4 Pf.; Mittwochs für 12 Thlr. 17 Gr.; Donnerstags für 18 Thlr. 1 Gr. 11 Pf; Freitags für 15 Thlr. 23 Gr.; Sonnabends für 19 Thlr. Wie viel hat er täglich im Durchschnitte eingenommen?

§. 102. Das vierte Glied einer arithmetischen Proportion findet man, wenn man von der Summe der beiden mittlern Glieder das erste Glied abzieht; denn es bezeichne x das unbekannte vierte Glied, so hat man z. B. $18 - 15 = 13 - x$; also $x + 18 = 15 + 13$ und $x = 15 + 13 - 18 = 10$. In der That ist auch jetzt $18 - 15 = 13 - 10$.

§. 103. Satz. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußern Glieder dem Produkte der beiden mittlern gleich.

I. Beweis. Es sei eine ganz nach Belieben gewählte Proportion

$$5 : 8 = 15 : 24.$$

so läßt sich dafür auch schreiben (nach §. 91.)

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

und vermöge §. 95. bleibt auch noch

$$8 \cdot \frac{5}{8} = 8 \cdot \frac{15}{24}$$

und $8 \cdot \frac{5}{8} \cdot 24 = 8 \cdot \frac{15}{24} \cdot 24$.
Dadurch fallen die Nenner weg; denn $8 \cdot \frac{5}{8} = 5$ und $\frac{15}{24} \cdot 24 = 15$; und man erhält

$5 \cdot 24 = 8 \cdot 15$ oder $120 = 120$

Dieses läßt sich auf die nämliche Weise von jeder andern Proportion beweisen. Und da es hier nicht auf die Größe der einzelnen Zahlen, sondern auf ihre gegenseitige Stellung zu einander ankommt: so wird man das Allgemeine im Beweise leicht erkennen.

II. Bew. Die Exponenten in den beiden Verhältnissen der Proportion sind einander gleich; sonst fände keine Proportion statt. Nun bestehet das erste Glied aus dem Produkte des zweiten Gliedes in den Exponenten; demnach hat das Produkt der beiden äußern Glieder zu Faktoren 1) das zweite Glied, 2) den Exponenten und 3) das vierte Glied.

Das dritte Glied ist das Produkt aus dem vierten in den Exponenten; daher hat das Produkt der beiden mittlern Glieder zu Faktoren 1) das zweite Glied, 2) das vierte Glied und 3) den Exponenten.

Folglich hat das Produkt der äußern Glieder eben die Faktoren, wie das Produkt der mittlern; beide Produkte müssen also gleich sein. Z. B.

$12 : 3 = 20 : 5$.

Hier ist der Exponent 4; demnach kann man auch schreiben:

$3 \cdot 4 : 3 = 5 \cdot 4 : 5$.

Macht man nun die Produkte der äußern und mittlern Glieder: so erhalten beide einerlei Faktoren und sind also gleich; nämlich

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 4$ oder $60 = 60$

§. 104. Umgekehrt kann man aus zwei gleichen Produkten immer eine geometrische Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produktes zu den äußern, die Faktoren des andern aber zu den mittlern Gliedern macht; z. B. $5 \cdot 6 = 3 \cdot 10$; hieraus wird $5 : 10 = 3 : 6$

§. 105. Weil ein Quadrat das Produkt aus zwei gleichen Faktoren ist: so ist in einer stetigen

geometrischen Proportion das Produkt der beiden äußern Glieder so groß, als das Quadrat des mittlern Gliedes; denn aus 3 : 6 = 6 : 12 erhält man 3 . 12 = 6 . 6 und ein solches mittleres Glied (hier 6) heißt auch die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwei Zahlen (hier zwischen 3 und 12).

§. 106. Satz. In jeder geometrischen Proportion lassen sich die beiden mittlern Glieder mit einander verwechseln.

Bew. Es verhält sich

$$5 : 10 = 3 : 6$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{5}{10} = \frac{3}{6}$$

Nun lassen sich an diesen zwei gleichen Zahlenausdrücken nach §. 95 folgende Aenderungen machen:

$$\frac{5}{10 \cdot 3} = \frac{3}{6 \cdot 3}$$

$$\frac{5 \cdot 10}{10 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 10}{6 \cdot 3} \text{ d. h. } \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

wofür sich schreiben läßt

$$5 : 3 = 10 : 6$$

welches zu beweisen war und auch an jeder andern Proportion auf gleiche Art nachgewiesen werden kann.

§. 107. Satz. Die Summe oder der Unterschied des ersten und zweiten Gliedes in jeder geometrischen Proportion verhält sich zum zweiten Glied, wie die Summe oder der Unterschied des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede.

Bew. 1) Es sei

$$8 : 4 = 14 : 7$$

so ist auch $\frac{8}{4} = \frac{14}{7}$

und $\frac{8}{4} + 1 = \frac{14}{7} + 1$ (§. 95) oder $\frac{8 + 4}{4} = \frac{14 + 7}{7}$

und dafür kann man schreiben

$$8 + 4 : 4 = 14 + 7 : 4 \text{ oder } 12 : 4 = 21 : 7.$$

2) Eben so findet man, nur — statt + geschrieben, daß, wenn

$15 : 3 = 40 : 8$

sich dann auch verhält

$15 - 3 : 3 = 40 - 8 : 8$ oder $12 : 3 = 32 : 8$.

§. 108. Satz. In einer Reihe gleicher Verhältnisse verhält sich immer die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Bew. Es sei z. B.

$2 : 8 = 5 : 20 = 6 : 24$

so lassen sich nach den §. §. 106. 107. folgende Veränderungen vornehmen:

$2 : 5 = 8 : 20$

und $2 + 5 : 5 = 8 + 20 : 20$

oder wiederum nach §. 106.

$2 + 5 : 8 + 20 = 5 : 20$

daher auch

$2 + 5 : 8 + 20 = 6 : 24$

und nach §. 106.

$2 + 5 : 6 = 8 + 20 : 24$

aber auch nach §. 107.

$2 + 5 + 6 : 6 = 8 + 20 + 24 : 24$

und wiederum nach §. 106.

$2 + 5 + 6 : 8 + 20 + 24 = 6 : 24$
$= 5 : 20 = 2 : 8$

Dieß läßt sich so fort beweisen, wenn auch noch so viele gleiche Verhältnisse gegeben sind.

§. 109. Aufg. Zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte zu finden.

Aufl. Man multiplicire das zweite und dritte Glied mit einander, und dividire ihr Produkt durch das erste; der Quotient gibt das verlangte vierte Glied.

Denn es seien z. B. die Zahlen 3, 15, 8 gegeben, und das unbekannte vierte Glied werde mit x bezeichnet: so ist

$3 : 15 = 8 : x$

hieraus erhält man vermöge §. 103.

$3 . x = 15 . 8$

Jetzt wissen wir schon das Dreifache der unbekannten Größe x; wir wollen aber blos das Einfache der-

selben kennen lernen. Dieß kann begreiflich gar leicht dadurch bewerkstelliget werden, daß wir 3 . x durch 3 dividiren. Denn $\frac{3 \cdot x}{3} = 1 . x = x$.

Nach §. 95. muß nun auch der Zahlenausdruck zur Rechten durch 3 dividirt werden, sonst bleiben die Größen einander nicht gleich. Dadurch erhält man

$$x = \frac{15 \cdot 8}{3} \text{ oder } x = 40$$

Wirklich ist nun 3 : 15 = 8 : 40 eine richtige Proportion, und aus dem Gange der Untersuchung wird man die Natürlichkeit und Richtigkeit, so wie die Allgemeinheit der vorgeschriebenen Regel ersehen.

§. 110. Satz. Zwei Zahlen bleiben in einerlei geometrischem Verhältnisse, wenn man sie mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Bew. Das Verhältniß bleibt unverändert, wenn der Exponent unverändert bleibt. Wenn nun beide Glieder durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so wird das eine Glied so vielmal größer oder kleiner, als das andere. Darum muß auch das erste Glied noch immer das zweite so oft in sich enthalten, als vor dem Multipliciren oder Dividiren, das heißt, der Exponent bleibt unverändert, folglich auch das Verhältniß. Oder man schreibe das Verhältniß als einen Bruch (§. 91.); so weiß man (§. 32. 34.), daß ein Bruch in seinem Werthe unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt. Z. B.
28 : 7 hat 4 zum Exponenten, und
3 . 28 : 3 . 7 d. i. 84 : 21 hat auch 4 zum Exponenten. Eben so
36 : 12 hat 3 zum Exponenten, und
$\frac{36}{4} : \frac{12}{4}$ d. i. 9 : 3 hat auch 3 zum Exponenten.

§. 111. Man kann daher in einer geometrischen Proportion die zwei Glieder eines jeden Verhältnisses mit einerlei Zahl multipliciren oder dividiren, und sie dadurch auf die kleinsten Zahlen bringen, wodurch die Rechnung oft sehr vereinfacht wird. Z. B.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = 16 : 13\frac{1}{3}$

$8 \cdot \frac{3}{4} : 8 \cdot \frac{5}{8}$ d. i. $6 : 5 = 16 : 13\frac{1}{3}$

wo überall der Exponent $1\frac{1}{5}$ ist.

Eben so $12 : 48 = 9 : 36$

$\frac{12}{12} : \frac{48}{12}$ d. i. $1 : 4 = 9 : 36$

wo durchaus der Exponent $\frac{1}{4}$ ist.

§. 112. Wegen §. 106 kann auch das erste und dritte Glied einer geometrischen Proportion mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden. Z. B.

$\frac{5}{4} : 6 = \frac{7}{4} : 8\frac{2}{5}$

$4 \cdot \frac{5}{4} : 6 = 4 \cdot \frac{7}{4} : 8\frac{2}{5}$

d. i. $5 : 6 = 7 : 8\frac{2}{5}$

Eben so $35 : 8 = 20 : 4\frac{4}{7}$

$\frac{35}{5} : 8 = \frac{20}{5} : 4\frac{4}{7}$

d. i. $7 : 8 = 4 : 4\frac{4}{7}$.

§. 113. Satz. Bei mehren Proportionen verhält sich das Produkt aller ersten Glieder zu dem Produkte aller zweiten, wie das Produkt aller dritten zu dem Produkte aller vierten. Z. B.

$$3:5 = 12:20$$
$$4:8 = 2:4$$
$$6:2 = 21:7$$

$$3.4.6:5.8.2 = 12.2.21:20.4.7$$

d. i. $72:80 = 504:560$

Bew. Um bei den gegebenen Proportionen stehen zu bleiben, weiß man (aus §. 91.), daß sich dieselben auch also schreiben lassen:

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$
$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$
$$\frac{6}{2} = \frac{21}{7}$$

Vermöge §. 95. aber ist

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{2} = \frac{12}{20} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{21}{7}$$

oder was einerlei ist

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 21}{20 \cdot 4 \cdot 7}.$$

wofür man nun schreiben kann:

$3.4.6:5.8.2 = 12.2.21:20.4.7.$

§. 114. Satz. Wenn Proportionen von der

Art sind, daß das Hinterglied des einen Verhältnisses immer dem Vorderglied des nachfolgenden gleich ist: so verhält sich das erste Glied der ersten Proportion zum zweiten Gliede der letzten Proportion, wie sich das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Gliede der letzten Proportion verhält.

Bew. Es sei z. B.

$$4 : 5 = 8 : 10$$
$$5 : 12 = 10 : 24$$
$$12 : 9 = 24 : 18$$

$$4 . 5 . 12 : 5 . 12 . 9 = 8 . 10 . 24 : 10 . 24 . 18 \text{ (§. 113.)}$$

und $\frac{4 . 5 . 12}{5 . 12} : \frac{5 . 12 . 9}{5 . 12} = \frac{8 . 10 . 24}{10 . 24} : \frac{10 . 24 . 18}{10 . 24}$

(§. 111.)

das ist $4:9 = 8:18$

§. 115. **Aufg.** Eine Zahl in mehre Theile zu theilen, daß sich diese Theile wie gegebene andere Zahlen verhalten.

Aufl. Es ist einleuchtend, daß die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen sich verhalte zu jeder einzelnen Verhältnißzahl, wie sich die zu theilende Zahl (als Summe) zu jedem gesuchten Theile (als der neuen Verhältnißzahl) verhält. Darum addire man zuerst die gegebenen Verhältnißzahlen und setze ihre Summe in das erste Glied einer geometrischen Proportion, jede einzelne gebene Verhältnißzahl in das zweite, und die zu theilende Summe oder Zahl in das dritte Glied. Dieß gibt so viele verschiedene Proportionen, als Verhältnißzahlen gegeben sind; zu welchen Proportionen das vierte Glied (nach §. 109.) gesucht wird, und dieses gibt nach der Reihe die verlangten Theile.

Z. B. die Zahl 4500 soll in 4 Theile getheilt werden, welche sich wie die Zahlen 3, 4, 5, 6 verhalten. Es ist aber $3 + 4 + 5 + 6 = 18$; demnach

$18 : 3 = 4500 : x$ woraus $x = 750$ erster Theil
$18 : 4 = 4500 : x$ „ „ $x = 1000$ zweiter Theil
$18 : 5 = 4500 : x$ „ „ $x = 1250$ dritter Theil
$18 : 6 = 4500 : x$ „ „ $x = 1500$ vierter Theil.

Wirklich verhält sich auch nun

750 : 1000 = 3 : 4

1000 : 1250 = 4 : 5

u. s. w. und die Summe der gefundenen Theile ist der gegebenen Zahl gleich, nämlich

750 + 1000 + 1250 + 1500 = 4500.

Anwendungen der bisherigen Lehren auf die verschiedenen Rechnungen des bürgerlichen Lebens.

I. Regel de tri.

§. 116. Die Regel de tri d. h. die Regel von drei, nämlich Sätzen oder Gliedern, ist nichts anders, als die Aufgabe: zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte zu finden (§. 109.) Sie findet also überall statt da, wo bei zwei Verhältnissen das Vorderglied des einen das Hinterglied so oft enthält, wie es bei dem andern Verhältniße sein soll, zu welchem noch das fehlende Glied gesucht wird. Die Größen in dem einen Verhältnisse können also von den Größen des andern gar wohl verschieden sein, wenn nur das eine Glied des ersten Verhältnisses so oft in dem andern Gliede enthalten ist, als das eine Glied des zweiten Verhältnisses in dem andern Gliede steckt. Dieses findet z. B. bei Waaren und ihrem zugehörigen Preise, bei Kapitalien und den Zinsen, die sie tragen u. s. w. statt. Denn dreimal so viel Waare kostet dreimal so viel Geld, sechsfach so große Kapitalien tragen sechsfach größere Zinsen, u. s. w. Z. B.

1 Pfd. : 3 Pfd. = 8 fl. : 24 fl.

eben so

100 fl. Kap. : 600 fl. Kap. = 5 fl. Zins. : 30 fl. Zins.

Die Glieder eines und des nämlichen Verhält-

nisses hingegen müssen immer von einerlei Art sein. Denn Lothe sind nicht in Gulden, noch Thaler in Pfunden enthalten. Es ist also unnatürlich, anzusetzen:

1 Pfd.: 8 fl. — 3 Pfd.: 24 fl.

§. 117. Wenn nun drei Größen gegeben sind, und man soll dazu die vierte suchen: so nehme man vor Allem diejenigen zwei, welche von einerlei Art sind, heraus und setze sie in das erste und zweite Glied; diejenige Größe aber, welche mit der fehlenden oder zu suchenden von einerlei Art ist, setze man in das dritte Glied und suche dann (nach §. 109.) das vierte, und dieses gibt die Zahl, nach der man fragt. Z. B. 7 Pfd. kosten 12 fl.; man will wissen, was 2 Pfd. kosten? Der richtige Ansatz ist

7 Pfd.: 2 Pfd. = 12 fl. : x fl.

woraus (nach §. 109.) $x = \frac{2 \cdot 12}{7} = \frac{24}{7} =$ $3\frac{3}{7}$ fl. d. h. 2 Pfd. kosten $3\frac{3}{7}$ fl.

Aber hier entsteht noch die Frage, welche von den beiden gegebenen gleichartigen Größen in die erste Stelle, und welche in die zweite gesetzt werden müsse? Um diesen Punkt zu bestimmen, darf man nur untersuchen, ob die Größen in einem solchen Verhältniße zu einander stehen, daß, wenn die eine zunimmt oder abnimmt, zugleich auch die andere zunimmt oder abnimmt, welches man das gerade Verhältniß nennt; oder ob sie in dem Verhältnisse zu einander stehen, daß die eine abnimmt, indem die andere zunimmt, oder daß die eine wächset, während die andere abnimmt, welches das umgekehrte Verhältniß heißt. Das gerade Verhältniß verlangt offenbar die Fragezahl d. h. diejenige Größe, von der man etwas wissen will, im zweiten Gliede; hingegen das umgekehrte im ersten Gliede. Beispiele:

1) Wenn 1 Person täglich 24 Kr. verdient; wie viel verdienen 6 Personen zusammen bei gleichem Fleiße täglich? Durch mehre Personen wird natürlich auch mehr verdient; daher kommt die Fragezahl, hier 6 Personen, ins zweite Glied also:

1 Perſ. : 6 Perſ. = 24 Kr. : x Kr.

und $x = \frac{6 \cdot 24}{1} = 144$ Kr. oder 2 fl. 24 Kr.

iſt der tägliche Verdienſt der 6 Perſonen.

2) Wie groß muß das Kapital ſein, damit es bei 5 Procent jährlich 365 fl. Zinſen trägt? Es iſt offenbar, daß hier ein gerades Verhällniß ſtatt findet. Denn zu größern Zinſen (hier 365 fl.) wird natürlich auch ein größeres Kapital erfordert. Daher iſt der Anſatz:

5 : 365 = 100 fl. Kapital: x fl. Kap.

und $x = \frac{365 \times 100}{5} = 7300$ fl. Kapital.

3) Zu einer beſtimmten Arbeit brauchen 18 Arbeiter 21 Tage; wie viel Tage aber werden nur 7 Arbeiter dazu nöthig haben? Man ſieht leicht, daß hier das umgekehrte Verhältniß eintritt; denn weniger Arbeiter brauchen zu der nämlichen Arbeit mehr Zeit. Die Fragezahl, hier 7 Arbeiter, kommt demnach ins erſte Glied, alſo:

7 Arb.: 18 Arb. = 21 Tage: x Tage

und $x = \frac{18 \cdot 21}{7} = 54$ Tage

d. h. 7 Arbeiter brauchen 54 Tage zu der nämlichen Arbeit, zu welcher 18 Arbeiter nur 21 Tage nöthig haben.

4) Zu einer Bekleidung ſind $8\frac{2}{5}$ Ellen Unterzeug erforderlich, das $\frac{5}{4}$ Ellen breit iſt; wie viel Unterzeug aber hat man nöthig, wenn daſſelbe $\frac{7}{4}$ Ellen breit iſt? Offenbar weniger als $8\frac{2}{5}$ Ellen; darum iſt der richtige Anſatz:

$\frac{7}{4} : \frac{5}{4} = 8\frac{2}{5} : x$

oder nach Anwendung des obigen (§. 111.) Satzes

$7 : 5 = 8\frac{2}{5} : x$

hieraus iſt $x = \frac{5 \cdot 8\frac{2}{5}}{7} = 6$ Ellen

d. h. bei $\frac{7}{4}$ Ellen Breite hat man nur 6 Ellen Unterzeug nöthig.

Um alſo den richtigen Anſatz zu treffen, darf man nur unterſuchen, ob das letzte Glied größer

oder kleiner werden müsse als das dritte, was man ohnehin aus der Natur und Beschaffenheit der Gegenstände, von denen die Rede ist, schon im Allgemeinen und zum voraus wissen kann. Wenn nämlich das vierte Glied größer werden muß als das dritte, so ist einleuchtend, daß von den gleichartigen zwei ersten Gliedern das größere die zweite Stelle einnehmen muß; wenn es aber kleiner werden muß, so erhält natürlich von den zwei ersten Gliedern das kleinere die zweite Stelle. Die vorhergehenden Beispiele geben Belege hiezu.

§. 118. Nach der obigen Eintheilung der Verhältnisse in gerade und umgekehrte hat man auch die Regel de tri in die gerade und umgekehrte eingetheilt, wiewohl dieser Unterschied nicht sowohl die Rechnungsart selbst, als vielmehr das praktische Verhältniß der verschiedenartigen Größen zu einander angeht.

§. 119. Ob es gleich nicht Sache der Rechenkunst als solcher ist, auszumitteln, welche Größen im geraden oder umgekehrten Verhältniß zu einander stehen — dieß muß vielmehr aus der Beschaffenheit der Gegenstände, aus Gesetzen der Gerechtigkeit und Billigkeit, aus eingeführten Gewohnheiten u. s. w. bestimmt werden — so kann man sich doch zur Erleichterung Folgendes merken:

In geradem Verhältnisse stehen 1) Waaren und ihre Preise; 2) Kapitalien und Zinsen; 3) die Menge der Arbeiter und die Menge ihrer Arbeit; die Zeit, während welcher sie arbeiten, und ihr Lohn; die Menge der Arbeit und ihr Lohn dafür; 4) die Anzahl der Personen und die Menge der Lebensmittel; 5) die Länge des Weges und die darauf verwandte Zeit bei gleicher Geschwindigkeit u. s. w.

In umgekehrtem Verhältnisse stehen 1) die Menge der Arbeiter und die zu einerlei Arbeit erforderliche Zeit; 2) die Menge der Menschen und die Zeit, in welcher sie eine bestimmte Menge Nahrungsmittel verzehren; 3) die Größe des Fußes und die Anzahl derselben in einer bestimmten Länge; 4) der

Preis des Getraides und das Gewicht des Brodes; 5) die Menge der Waare, welche man für ein bestimmtes Geld kauft, und der Preis derselben; 6) die Geschwindigkeit und die Zeit bei einerlei Weg; 7) die Größe der Fracht und die Länge des Weges bei gleichgroßer Zahlung; 8) die Breite eines Zeuges und seine Länge, wenn das Zeug zu einerlei Absicht gebraucht, oder aus einer bestimmten Menge Garn verfertigt wird; 9) die Größe der Kapitalien und der Prozente, wenn gleichviel Zinsen fallen sollen; eben so die Kapitalien und die Zeit des Ausstehens bei gleichgroßen Zinsen.

§. 120. Wenn in irgend einem Verhältnisse verschiedenartige Einheiten z. B. verschiedene Arten von Geld, Gewicht, Maaß u. s. w. vorkommen: so muß man sie auf einerlei Einheit bringen; denn 4 fl. und 36 Kr. verhalten sich nicht wie 4 zu 36. Es kann dieß auf doppelte Weise geschehen: Entweder man bringt die größern Einheiten auf die kleinern, oder die kleinern auf die größern dadurch, daß man sie durch einen Bruch der größern ausdrückt; welches von beiden man nämlich in der Rechnung am bequemsten findet. Beispiele:

1) 3 Ctl. 72 Pf. Fleisch kommen auf 56 fl. 48 Kr. zu stehen; wie hoch kommt das Pfund?

3 Ctl. 72 Pfd. : 1 Pfd. = 56 fl. 48 Kr. : x
d. i. 372 Pfd. : 1 Pfd. = 3408 Kr. : x Kr.
woraus $x = \frac{3408}{372} = 9\frac{5}{31}$ Kr. kostet 1 Pfd.

Man hätte aber auch, wiewohl unbequemer, die Pfde. in Ctl. verwandeln können; dann erhält man

$3\frac{72}{100}$ Ctl. : $\frac{1}{100}$ Ctl. = 3408 Kr. : x Kr.

und hieraus, wie vorhin, $x = 9\frac{5}{31}$ Kr.

2) Wenn 20 Pfd. $58\frac{2}{3}$ fl. kosten; wie hoch kommt das Loth? Weil offenbar Kreuzer herauskommen, so verwandelt man die fl. gleich in Kr.; eben so die Pfde in Lothe und setzt an:

640 Lothe : 1 Loth = 3520 Kr. : x Kr.
woraus $x = \frac{3520}{640} = 5\frac{1}{2}$ Kr. kostet 1 Loth.

§. 121. Die obigen Sätze §. 111 und 112 kön-

nen sehr oft mit Vortheil angewendet werden. Ihr Gebrauch gibt zum Theil das, was in manchen Rechenbüchern unter dem Namen der welschen Praktik vorkömmt. Beispiele:

1) Man kauft $4\frac{1}{4}$ Pfd. um 3 fl. 45 Kr.; wie hoch kommen $\frac{3}{4}$ Pfd.?

$4\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 3$ fl. 45 Kr. : x

oder $\frac{17}{4} : \frac{3}{4} = 225$ Kr. : x; und nun nach §. 111.

$17 : 3 = 225 : x$; woraus

$x = \frac{3 \cdot 225}{17} = 39\frac{12}{17}$ Kr. der Werth von $\frac{3}{4}$ Pfd.

2) Für $12\frac{1}{2}$ Loth zahlt man $3\frac{1}{2}$ Thlr.; wie hoch kommen 20 Loth?

$12\frac{1}{2} : 20 = 3\frac{1}{2}$ Thlr. : x Thlr.

$\frac{25}{2} : 20 = \frac{7}{2} : x$

$25 : 20 = 7 : x$ nach §. 112.

ferner $5 : 4 = 7 : x$ nach §. 111. und

$x = \frac{4 \cdot 7}{5} = 5\frac{3}{5}$ Thlr. der Preis von 20 Loth.

3) Man kauft 7 Pfd. um 26 Thlr.; wie viel kosten 28 Pfd.?

$7 : 28 = 26 : x$

$1 : 4 = 26 : x$ nach §. 111.

also $x = 104$ Thlr. der Werth der 28 Pfd.

4) Es werden 12 Ell. mit 33 fl. bezahlt; wie hoch kommen 40 Ell.?

$12 : 40 = 33 : x$

$3 : 10 = 33 : x$ nach §. 111.

ferner $1 : 10 = 11 : x$ nach §. 112.

und $x = 110$ fl. der Preis von 40 Ell.

§. 122. Folgende Aufgaben werden theils nach der geraden, theils nach der umgekehrten Regel de tri berechnet:

1) Ein Quint Safran kostet 17 Kr. 2 Pf.; wie hoch kommen 1 Pfd. 8 Loth und 1 Quint?

2) Für $\frac{2}{3}$ fl. erhalte ich $\frac{3}{4}$ Pfd.; wie viel bekomme ich für $\frac{3}{5}$ fl.?

3) Wenn die Leinwand $1\frac{1}{2}$ Ellen breit wird, bekommt eine Frau von ihrem Garn $30\frac{3}{4}$ Ellen;

wie viel Ellen wird sie erhalten, wenn die Leinwand nur $\frac{5}{4}$ breit werden soll?

4) Ein Getreidefeld könnte von 4 Schnittern in 10 Tagen abgeschnitten werden. Es soll jedoch in kürzerer Zeit geschehen. Der Besitzer gibt daher noch 2 Schnitter dazu; in wie viel Tagen wird nun das Getreide abgeschnitten werden?

5) Jemand leihet seinem Freunde 500 fl. auf 4 Monate ohne Zinsen. Es tritt nun der Fall ein, daß der Erstere auch ein Kapital braucht und vom Letztern 800 fl. entlehnt. Wie lang muß dieser das Kapital stehen lassen, damit er Gleiches mit Gleichem vergelte?

6) In Hamburg kosten $913\frac{3}{4}$ ℔. einer Waare 795 Mark 15 Schillinge und $4\frac{1}{18}$ Pfennige; was kosten hienach 12 ℔ dieser Waare?

7) 1 Pfund Gewürz kostet 42 fl. 40 Kr.; was kostet 1 Quint?

8) Ein Handwerksmann kauft sich in sein Haushalten 1 Paar Schweinlein um $14\frac{1}{2}$ fl. Futter und Mastung kosten ihm 20 fl. 15 Kr. Die Ausgaben beim Schlachten betragen 1 fl. 36 Kr. Die Schweine wägen $214\frac{1}{2}$ Pfund. Wie hoch kommt ihm das Pfund zu stehen?

9) Ein Geschenk hat unter 25 Arme vertheilt werden sollen, so daß Jeder 5 fl. $18\frac{1}{2}$ Kr. erhalten haben würde; nun aber sollen noch 8 Arme weiter daran Theil haben; wie viel wird jetzt auf eine Person kommen?

10) Ein Fuhrmann verspricht um einen gewissen Lohn 18 Ctl. Waare 6 Meilen Wegs zu führen; wie weit müßte er um gleichen Lohn 48 Ctl. führen?

11) Eine Elle Tuch kostet im Auslande $5\frac{1}{2}$ fl.; was muß sie im Inlande kosten, wo die Elle größer ist, indem 100 inländische Ellen 107 ausländische machen?

12) 125 Ellen kosten 75 Thlr. 12 Gr. 6 Pf. Was kostet 1 Elle?

13) 6 Ctl. $42\frac{1}{3}$ ℔. kosten 54 fl. 23 Kr. $2\frac{1}{8}$ Pf. Wie hoch kommt 1 Loth?

14) $7\frac{1}{5}$ Pfd. kosten $127\frac{1}{2}$ fl. Was kosten $2\frac{5}{8}$ Pfd.?

15) Ein Reisender legt in $3\frac{1}{2}$ Tagen $14\frac{2}{3}$ Meilen zurück; welchen Weg wird er in einer Woche machen?

16) Bei einem Tischler ist eine Arbeit bestellt worden, die in 8 Tagen fertig sein soll; da seine 4 Gesellen aber wenigstens 14 Tage dazu nöthig haben würden, so wird gefragt: wie viele derselben der Meister noch annehmen muß, um das Bestellte in der bestimmten Zeit zu liefern?

17) Wenn für 1150 Soldaten Mundvorrath in einer Festung auf 9 Monate vorhanden ist; wie lange können 850 Soldaten davon erhalten werden?

18) In einer belagerten Festung liegen 8000 Mann Besatzung mit einem Vorrath an Lebensmitteln auf 16 Monat. Nach 4 Monaten entkommen 1800 Mann aus der Festung. Wie lange sind die übrigen noch mit Lebensmitteln versehen?

19) $2\frac{5}{8}$ Ctl. betragen 46 Thlr. 11 Gr. $7\frac{1}{2}$ Pf. Was kosten $7\frac{1}{5}$ Ctl.?

20) Die bairische Elle enthält 369,27 pariser Linien; die preußische aber 295,6 par. Linien. Wie viel Ellen in Preußen betragen demnach 100 bairische Ellen?

21) Für 8 Thlr. 15 Gr. $4\frac{8}{25}$ Pf. erhält man $\frac{4}{5}$ Ctl. Wie viel bekommt man für $6\frac{3}{4}$ Thlr.?

22) Wie viele königl. sächsische und königl. preußische Scheffel Fruchtmaaß gehen auf ein königl. bairisches Scheffel, da das sächsische Scheffel 5416 französische Kubikzoll, das preußische Scheffel 2770,7 franz. Kubikzoll und das bairische Scheffel 11209 franz. Kubikzoll enthält?

23) An einem Bau haben gearbeitet 10 Maurer 8 Wochen und 4 Tage, 7 Zimmerleute 5 Wochen und 2 Tage, und 3 Handlanger 6 Wochen und 1 Tag. Nun bekommt jeder Maurer täglich 24 Kreuzer, jeder Zimmermann täglich $26\frac{1}{4}$ Kr., und jeder Handlanger täglich $17\frac{1}{2}$ Kr. Was hat der Bauherr im Ganzen zu zahlen, wenn die Arbeitswoche zu 6 Tagen gerechnet wird?

24) Einer Haushälterin wurden 25 fl. zum Einkauf verschiedener Lebensmittel übergeben; davon kaufte sie $13\frac{1}{2}$ Pfd. Schmalz, das Pfd. zu $19\frac{1}{2}$ Kr.; $3\frac{1}{2}$ Hundert Aepfel, zu 40 Kr.; $9\frac{3}{4}$ Pfd. Kalbfleisch zu 7 Kr.; $3\frac{1}{4}$ Pfund Rindfleisch zu $7\frac{1}{2}$ Kr.; 7 junge Hähner, zu $14\frac{1}{2}$ Kr.; $3\frac{1}{4}$ Pfund Kaffee, zu $52\frac{1}{2}$ Kr.; $1\frac{1}{2}$ Loth Safran zu 50 Kr.; 2 Metzen Salz, zu $1\frac{2}{3}$ fl.; 3 Schinken, welche wogen $19\frac{1}{2}$ Pfund, das Pfund zu $12\frac{1}{2}$ kr.; 1 Pfd, $2\frac{1}{2}$ Vierling Butter, das Pfd. zu 18 Kr.; 3 Pfd. $2\frac{1}{2}$ Vierling Zucker, das Pfd. zu 48 Kr. Wie viel hatte nun die Haushälterin ausgegeben?

25) Wenn die köllnische Mark fein Silber in Rußland zu 13 Silberrubeln, in Spanien zu $193\frac{1}{2}$ Realen de Vellon, in London zu $42\frac{1}{2}$ Schilling, in Hamburg zu 34 Mark, in Preußen zu 14 Thalern, in Sachsen zu $13\frac{1}{3}$ Thalern, in Wien zu 20 Gulden, und in Baiern zu 24 Gulden ausgeprägt wird; was ist demnach 1 Silberrubel, 1 Real de Vellon, ein englischer Schilling, 1 hamburger Mark und 1 hamburger Schilling, von denen 16 auf eine Mark gehen, 1 preußischer Thaler, 1 sächsischer Thaler, und endlich 1 wiener Gulden in Baiern werth?

Anmerk. Eben so kann man fragen, was in Preußen oder in Sachsen oder im Hamburg u. s. w. jede andere ausländische Münze werth ist.

II. Regel de quinque, de septem ꝛc. ꝛc.

§. 123. Oft geschieht es, daß eine Größe von mehren andern so bestimmt wird, daß sie mit jeder derselben, wenn man die übrigen als unveränderlich annimmt, in einem geometrischen, entweder geraden oder umgekehrten Verhältniß steht, d. h. sie steht in dem zusammengesetzten Verhältniß aller jener Größen. Es soll z. B. bestimmt werden, wie hoch sich die Zinsen von 3200 fl. in 30 Monaten zu 4 Procent belaufen, wenn die Zinsen von 100 fl. zu 5 Procent d. i. in 12 Monaten 5 fl. tragen. Hier hängt offenbar der Werth oder die Größe der

Zinsen von dem Werthe dreier Arten von Größen ab, nämlich vom Kapital, von den Procenten und von der Zeit. Die Zinsen bilden daher mit jeder dieser Größen eine besondere Proportion.

Wenn man daher eine solche Aufgabe in den Ansatz bringen will: so setze man, wie bei der Regel de tri, die Größe, welche mit der zu suchenden von einerlei Art ist, in das dritte Glied. Diese macht mit der gesuchten Ein Verhältniß aus, welches aus den Verhältnissen der übrigen gegebenen Größen zusammengesetzt ist.

Alsdann setze man in das erste und zweite Glied immer zwei der übrigen Größen von einerlei Art als Ein Verhältniß zusammen, und zwar alle unter einander; dabei berücksichtige man bei jedem einzelnen Verhältnisse, ob die zu bestimmende oder zu suchende Größe mit der, durch welche sie bestimmt wird, in geradem oder umgekehrtem Verhältnisse stehe, wie bei der Regel de tri, um jeder Größe die rechte Stelle anzuweisen. Das gegebene Beispiel wird demnach, weil alle Größen in geradem Verhältnisse stehen, also angesetzt:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ fl. Kap.} : 3200 \text{ fl. Kap.} \\ 12 \text{ Mon.} : 30 \text{ Mon.} \\ 5 \text{ Proc.} : 4 \text{ Proc.} \end{array}\right\} = 5 \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

und vermöge §. 113. erhält man, indem man die ersten Glieder mit einander multiplicirt, und eben so die zweiten, folgenden Ansatz:

$100 . 12 . 5 : 3200 . 30 . 4 = 5 : x$

d. i. $6000 : 384000 = 5 : x$

und $x = \frac{384000 . 5}{6000} = 320$ fl. Zinsen.

Durch Anwendung der Sätze §. 110 — 112. wird, weil jede Zahl durch sich selbst dividirt, 1 (Eins) oder die Einheit gibt, ganz einfach

$1 : 32 . 10 = 1 : x$

woraus $x = 320$ fl. wie vorhin.

oder $1 : 64 = 5 : x$

und $x = 64 . 5 = 320$ fl.

§. 124. Folgende Aufgaben enthalten theils gerade, theils umgekehrte Verhältnisse, als:

1) Ein Weber mache von 24 Pfund Garn 40 Ellen Tuch 9 Viertel breit; wie viel Ellen kann er aus 36 Pfd. Garn wirken, wenn das Tuch $4\frac{1}{2}$ Viertel breit werden soll? Die Menge der Pfunde stehet mit der Menge der Ellen im geraden, die Breiten aber mit der Menge der Ellen im umgekehrten Verhältniß; daher ist der Ansatz:

$$\left.\begin{array}{r} 24 : 36 \\ \frac{9}{2} : 9 \end{array}\right\} = 40 : x$$

woraus x = 120 Ellen.

2) 15 Leinweber, die täglich 10 Stunden arbeiten, verfertigen in 5 Wochen und 3 Tagen 50 Stücke Leinwand; wie viel Leinweber werden erfordert, um 120 Stücke zu verfertigen, wenn sie 3 Wochen und 4 Tage lang täglich 15 Stunden arbeiten sollen? Hier ist das Verhältniß zwischen den Arbeitern und ihren Arbeiten ein gerades; die übrigen sind umgekehrte. Demnach ist der Ansatz:

$$\left.\begin{array}{r} 50 : 120 \\ 3 : 5 \\ 4 : 3 \\ 15 : 10 \end{array}\right\} = 15 : x$$

und hieraus ist x = 30 Leinweber.

3) Wenn 100 fl. Kapital jährlich 5 fl. Zinsen tragen; wie viel Zinsen wird man von 800 fl. in $4\frac{1}{2}$ Jahren bekommen?

4) Ein Fuhrmann erhält für 16 Ctl. auf 28 Meilen 40 Thlr.; wie viel wird er für 25 Ctl. auf 35 Meilen bekommen?

5) In 2 Tagen pflügen 2 Arbeiter 13 Morgen Land, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Arbeiter gehören dazu, wenn sie in 7 Tagen 200 Morgen pflügen und täglich 10 Stunden arbeiten sollen?

6) In wie viel Wochen werden 16 Arbeiter, die täglich 12 Stunden an der Arbeit sind, einen Damm von 400 Fuß Länge und 6 Fuß Breite fertig brin-

gen, wenn 20 Arbeiter bei täglich 8stündiger Arbeit in 4 Wochen einen Damm von 300 Fuß Länge und 8 Fuß Breite, der übrigens mit dem vorigen einerlei Höhe hat, fertig machen?

7) Wenn der Metzen Roggen mit dem Umgelde $2\frac{1}{2}$ fl. kostet, so wieget ein 6 Kreuzerbrod 2 Pfd. 6 Loth; wie viel muß ein 9 Kreuzerbrod wiegen, wenn der Metzen Roggen mit 3 fl. bezahlt wird?

8) Von 15 Arbeitern sind in 5 Wochen 200 Klaftern Holz geschlagen worden, indem sie wöchentlich 4 Tage und täglich 8 Stunden gearbeitet haben. Nun will man zur Abschlagung eines andern Holzes 32 Arbeiter auf 7 Wochen annehmen, die wöchentlich 6 Tage und täglich 2 Stunden mehr als die ersten arbeiten sollen. Wie viele Klaftern werden sie in dieser Zeit fällen?

9) Es habeu 14 Arbeiter in 4 Wochen bei einer täglichen Arbeit von 8 Stunden einen Graben 120 Fuß lang, 6 Fuß breit und $3\frac{1}{2}$ Fuß tief gegraben. Nun soll ein anderer Graben gezogen werden, 315 Fuß lang, 9 Fuß breit und $4\frac{1}{2}$ Fuß tief, der in 12 Wochen fertig sein soll. Wie viele Arbeiter sind bei täglicher Arbeit von 9 Stunden hiezu erforderlich?

10) Von 750 fl. Kapital sind in $5\frac{1}{2}$ Monaten 15 fl. 28 Kr. $\frac{1}{2}$ Pf. Zinsen eingegangen. Es ist die Frage: zu wie viel Procent auf das Jahr obiges Kapital ausgeliehen war?

11) Eine Festung ist auf 15 Monate mit Lebensmitteln für 3000 Mann versehen, wenn jedem Mann täglich 3 Pfd. gereicht werden. Nach 7 Monaten erhält sie 400 Mann Verstärkung und den Befehl, mit den noch übrigen Lebensmitteln 10 Monate auszureichen. Wie viel darf jetzt jedem Mann täglich gereicht werden?

12) Eine Mauer, welche 1 Fuß dick, 4 Fuß hoch und 30 Fuß lang ist, können 6 Maurer bei 12 Stunden täglicher Arbeit in 5 Tagen fertig machen, wenn sie täglich 620 Ziegelsteine setzen. Nun ist die Frage: in wie viel Tagen wird eine andere Mauer

fertig werden, welche 2 Fuß dick, 6 Fuß hoch und 60 Fuß lang werden soll, wozu 12 Maurer genommen werden, die täglich nur 10 Stunden arbeiten und täglich 1000 Ziegelsteine setzen?

Anmerkung. Bei solchen und ähnlichen Aufgaben ist es gut, wenn man sich einen vorläufigen Ansatz macht, so daß man die bekannten Zahlen in eine Reihe setzt und unter diese die Fragezahlen d. h. diejenigen, von welchen man etwas wissen will, und zwar die gleichartigen unter einander. Z. B. die sechste Aufgabe etwa also:

	Woch.	Arb.	Stund.	Fuß-L.	Fuß-B.
Bekannte Zahlen	4	20	8	301	8
Fragezahlen	x	16	12	400	6

Man kann auf diese Weise die ganze Aufgabe leicht überschauen, und beurtheilen, ob die zusammengehörigen Glieder in einen geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen, was den Ansatz ungemein erleichtert.

III. Kettenregel.

§. 125. Wenn das Verhältniß zweier Größen durch eine Reihe unter einander gesetzter Proportionen bestimmt wird, und diese Proportionen von der Art sind, daß in den einen Verhältnissen jedes Hinterglied mit dem Vorderglied der nachfolgenden Proportion einerlei ist: so nennt man diese Rechnungsart von der zusammenhängenden Stellung der Glieder die Kettenregel. Z. B. Man soll angeben, wie viel fl. rhl. in 100 Silber-Rubeln enthalten sind, wenn

3 Rubel = 1 Dukaten
6 Duk. = 17 Thlr. sächs.
20 Thlr. sächs. = 21 Thlr. preuß.
4 Thlr. pr. = 7 fl. rhl.

sind. Wenn man hier die bekannten Größen als Faktoren betrachtet, wie denn wirklich 3 Rubel so viel als 3 . 1 Rubel sind: so hat man je zwei gleiche Produkte, nämlich

3 . 1 Rub. = 1 . 1 Duk.
6 . 1 Duk. = 17 . 1 sächs. Thlr.
20 . 1 sächs. Thlr. = 21 . 1 pr. Thlr.
4 . 1 pr. Thlr. = 7 . 1 fl. rhl.

Aus zwei gleichen Produkten läßt sich aber immer eine Proportion machen (§. 104). Folglich können obige Angaben auch also ausgedrückt werden;

1 Rubel : 1 Dukaten = 1 : 3.
1 Duk. : 1 Thlr. sächs. = 17 : 6.
1 Thlr. sächs. ; 1 Thlr. pr. = 21 : 20
1 Thlr. pr. : 1 fl. rhl. = 7 : 4.

Indem man nun den Satz §. 113 benutzet und anwendet, so erhält man

1 R. 1 D. 1 Th. s. 1 Th. pr. : 1 D. 1 Th. s. 1 Th. pr. 1 fl. rhl.
= 1 . 17 . 21 . 7 : 3 . 6 . 20 . 4.

Jetzt dividire man (vermöge §. 111.) das Verhältniß zur Linken durch 1 Duk. 1 Thlr. sächs. 1 Thlr. pr. also

$$\frac{1\ \text{R.}\ 1\ \text{D.}\ 1\ \text{Th. s.}\ 1\ \text{Th. pr.}}{1\ \text{D.}\ 1\ \text{Thlr. s.}\ 1\ \text{Thlr. pr.}} \cdot \frac{1\ \text{D.}\ 1\ \text{Th. s.}\ 1\ \text{Th. p.}\ 1\ \text{fl. rh.}}{1\ \text{D.}\ 1\ \text{Thlr. s.}\ 1\ \text{Thlr. pr.}}$$
= 1 . 17 . 21 . 7 : 2 . 6 . 20 . 4

und man erhält dafür ganz einfach

1 Rubel : 1 fl. rhl. = 1 . 17 . 21 . 7 : 3 . 6 . 20 . 4.
oder 1 Rubel : 1 fl. rhl. = 2499 : 1440
also 1 Rubel. 1440 = 2499. 1 fl. rhl. (§. 103.)
woraus 1 Rubel = $\frac{2499}{1245}$ fl. rhl. (§. 95.)
folglich
100 Rubel = 100. $\frac{2499}{1440}$ = 173 fl. $32\frac{1}{2}$ Kr. rhl.

Aus dieser Darstellung wird man leicht den Grund des Verfahrens nach der Kettenregel einsehen. Nach ihr nämlich setzt man die Glieder nicht in eine Proportion, sondern nach den gleichen Produkten derselben, d. h. in derjenigen Verbindung, in welcher sie in der Aufgabe selbst schon gemeiniglich gegeben sind. Zu dem Ende setzt man in die erste Stelle linker Hand die gesuchte oder unbekannte Zahl und in die erste Stelle rechter Hand die Fragezahl. Darunter setzt man die übrigen Größen so, daß jedes Glied zur Rechten mit jedem Glied zur Linken in der folgenden Reihe oder Gleichung von einerlei Art ist; kurz, jede neue Reihe muß mit dersel-

ben Art von Größe anfangen, mit welcher die vorhergehende endigt. Auf diese Weise fährt man fort, bis man rechter Hand zu derjenigen Gattung von Größe kommt, mit welcher man linker Hand angefangen hat, und deren Anzahl gesucht werden soll. Diesemnach wird obiges Beispiel nach der Kettenregel also angesetzt:

x fl. rhl.	=	100 Silberrubel
3 Rubel	—	1 Dukat.
1 Duk.	=	17 Thlr. sächs.
20 Thlr. sächs.	=	21 Thl. pr.
4 Thlr. pr.	=	7 fl. rhl.

Jetzt multiplicire man Alles, was linker Hand und rechter Hand steht und dividire mit dem Produkte linker Hand in das Produkt rechter Hand; der Quotient gibt die gesuchte Größe. Denn $x \cdot 3 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 4 = 100 \cdot 1 \cdot 17 \cdot 21 \cdot 7$ (§. 95.) woraus $x = \frac{100 \cdot 1 \cdot 17 \cdot 21 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 4}$ (§. 95.) $= 173\frac{13}{24}$ fl. rh. d. h. 100 SRubel betragen $173\frac{13}{24}$ fl. rhl.

Anmerkung. Anstatt der Zeichen = kann man auch blos einen einfachen Querstrich — der Kürze wegen machen, oder auch wohl statt aller dieser Zeichen einen senkrechten Strich ziehen, also:

x fl. rhl.	100 SilberRubel
3 Rubel	1 Duk.
6 Dukat.	17 Thlr. s.
20 Thlr. sächs.	21 Thlr. pr.
4 Thlr. pr.	7 fl. rhl.

auch, wie bei der zusammengesetzten Regel de tri (vermöge §. 110—112.) in beiden Reihen gleich große Zahlen oder Faktoren gegenseitig ausstreichen.

§. 126. Dergleichen zusammenhängende Verhältnisse können auch zwischen Geld und Waaren statt finden. Z. B. Wieviel Rthlr. kosten 27 brabanter Ellen Zeug, wenn 5 brabanter Ellen 6 hamburger ausmachen, und 11 hamburger Ellen 14 Speciesthaler kosten, und 3 Spec. Thaler 4 Rthlr. ausmachen?

x Rthlr. = 27 brab. Ell.
5 brab. Ellen = 6 hamb. Ell.
11 hamb. Ell. = 14 Spec. Th.
3 Spec. Thlr. = 4 Rthlr.

Man findet $x = \frac{27 . 6 . 14 . 4}{5 . 11 . 3} = 54\frac{54}{55}$ Rthlr.

§. 127. Aufgaben zur Uebung:

1) Wieviel betragen 200 Konv. Thlr. in hannövr. Thalern Kassenmünze, wenn 5 Konv. Thlr. = 12 fl. rhl.; 9 fl. rhl. = 1 Louisdor; 1 Louisdor = 7 fl. Kassenmünze und 3 fl. Kass. = 2 hannövr. Thlr. sind?

2) Man verlangt das Verhältniß des hamb. Schillings zu dem sächsischen Groschen zu wissen, wenn 16 Schill. = 1 Mark sind; 57 Mark = 4 Louisdor; 3 Ldor = 16 sächs. Thlr. und 1 s. Thlr. = 24 Gr.

3) Wenn 9 Louisdor = 16 Dukaten; 1 Duk. = 9 Mark und 3 Mark = 1 Thlr. sind: so frägt sich, wie viel Thaler auf eine Louisdor gehen und wie viel Louisdor 10000 Thlr. betragen?

4) Wie viel kostet 1 Pfund Kaffee leipz. Gewicht in sächs. Groschen, wenn 100 Pfd. amsterd. Gew. 120 holländ. fl. kosten und 5 holl. fl. = 2 holl. Thlr.; 100 holl. Thlr. = 47 holl. Duk.; 6 Duk. = 17 sächs. Thl. und 1 sächs. Thlr. = 24 Gr. ingleichen 56 amsterd. Pfund = 57 hamb. und 27 hamb. Pfund = 28 leipz. sind?

5) Wie viel bairische Fuß sind 100 englische Fuß, wenn 81 englische Fuß gleich sind 76 pariser; 29 pariser gleich 30 rheinländischen, und 930 rheinländische gleich 1000 bairischen Fußen?

6) Welches ist das Verhältniß der Mark Gold fein zur Mark Silber fein, wenn $21\frac{2}{3}$ Mark Gold (zu 24 Karat) = 24 Mark Gold (zu $21\frac{2}{3}$ Karat), 1 Mark Gold (zu $21\frac{2}{3}$ Karat) = 35 Friedrichsd'or, 1 Frd'or = $5\frac{1}{2}$ Rthlr., 2 Thlr. = 3 Gulden preuß., und 21 Gulden = 1 Mark Silber fein.

7) Man soll das Verhältniß der persischen Parasange zur teutschen Meile bestimmen. Man weiß, daß 10 Parasangen 9 brabantische Meilen machen;

1 brabantische Meile 3 italienische; 4 italienische 1 große polnische; 5 große polnische 6 portugiesische; 9 portugiesische 5 westphälische und 2 westphälische 3 gemeine teutsche.

8) Wenn 7 fl. rhl. 4 preußische Thaler, 155 preußische Thaler 100 hamburger Banko, 100 Thaler hamburger Banko $140\frac{1}{2}$ Thaler dänisches Kurrent, $131\frac{1}{2}$ Thaler dänisches Kurrent 100 Thaler holländisches Kurrent, 1 holländischer Thaler $8\frac{1}{3}$ Schillinge flämisch, 38 Schillinge flämisch holländischen Bankogeldes 1 Pfund Sterling machen: was wird 1 Pfund Sterling nach rheinischen Gulden werth sein?

9) Was ist ein hamburger Schilling Kurrent an rheinischen Kreuzern werth, wenn 60 Kr. auf einen Gulden gehn, 24 fl. gleich sind $9\frac{5}{12}$ hamburger Thalern Banko, 1 Thlr. Banko gleich 3 Mark Banko, und die Mark Kurrent 24 Procent gegen Banko verliert (d. h. 124 M. K. = 100 M. Bko.) und die Mark 16 Schillinge enthält?

10) Wenn 84 amsterdamer ℔. 65 Thaler hamburger Banko kosten; wie viel hannövrische Kurrentthaler kostet 1 ℔. hannöverisch Gewicht, da man weiß, daß 102 hannöverische ℔. gleich sind 98 amsterdamer ℔., und 10 hamburger Bankothaler so viel betragen als 13 hannövrische Kurrentthaler?

11) Es sind 325 Pfd. einer Waare um 450 fl. eingekauft worden. Wie hoch muß man 1 Pfd. wieder verkaufen, wenn 30 vom Hundert sollen gewonnen werden?

12) In Hamburg kosten 57 Pfd. hamb. Gewicht 63 Thlr. Kurrent. Wie viel sächsische Thaler kostet 1 leipziger Pfd., wenn 25 hamburger Pfd. soviel sind als 26 leipz. Pfd., und der Wechselkurs 12 Procent zum Vortheil der Hamburger ist d. h. wenn 100 Thlr. hamburger Kurrent in Leipzig 112 Thaler gelten, und man überdieß 16 vom Hundert gewinnen will?

IV. Gesellschafts- und Vermischungs-Rechnung.

§. 128. Wenn mehre Personen zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung zusammen treten und eine Kasse errichten, wozu die Beiträge der einzelnen Mitglieder von verschiedener Größe sind: so ist es nicht mehr als billig, daß der Gewinn oder Verlust nach dem Verhältniß der Größe der einzelnen Beiträge bestimmt werde. Denn wer dreimal soviel als ein Anderer gegeben hat, macht auch auf einen dreifach größern Theil Anspruch. Die Gesellschaftsrechnung lehrt nun, in solchen Fällen die gerechten und verhältnißmäßigen Theile bestimmen und finden; sie gründet sich daher ganz auf den obigen (§. 115). Satz: Eine Zahl in mehre Theile zu theilen, daß diese Theile sich wie gegebene andere Zahlen verhalten. Die dortige Auflösung gibt also auch das Verfahren für die Gesellschaftsrechnung, nämlich: Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen (welches z. B. die einzelnen Beiträge sind), die man aber zur Erleichterung der Rechnung auf die kleinsten Zahlen bringen kann (vermöge §. 111. 112.) und setze ihre Summe in das erste Glied der Proportion, jede einzelne Verhältnißzahl nach der Reihe in das zweite Glied, und dann in das dritte die zu theilende Größe; dazu suche man (nach §. 109.) das vierte Glied, welches so oft geschehen muß, als einzelne Verhältnißzahlen d. i. Theilnehmer der Gesellschaft vorhanden sind. Jedes gefundene vierte Glied gibt den Antheil jeder Person nach der Reihe an. Beispiele:

1) Vier Personen fangen einen Getreidehandel an; A gibt dazu 100 fl., B 130, C 75 und D 200. Sie gewinnen damit 230 fl. Was wird davon auf eines Jeden Antheil kommen? Weil 100 + 130 + 75 + 200 = 505; so setze man:

505 : 100 = 230 : Antheil des A
505 : 130 = 230 : „ „ B
505 : 75 = 230 : „ „ C
505 : 200 = 230 : „ „ D

So findet man, daß A 45 fl. 32 Kr. $2\frac{70}{101}$ Pf. B 59 fl. 12 Kr. $1\frac{91}{101}$ Pf. C 34 fl. 9 Kr. $2\frac{2}{101}$ Pf. und D 91 fl. 5 Kr. $1\frac{39}{101}$ Pf. erhält. Die Summe dieser einzelnen Gewinnste muß wieder dem ganzen Gewinnste gleich sein.

2) Drei machen eine Gesellschaft; A legt dazu 120 fl., B 150 fl. und C 180 fl. Sie sind aber in ihrem Unternehmen unglücklich und verlieren 124 fl. Wie viel muß ein Jeder am Verlust tragen? Es ist 120 + 150 + 180 = 450. Demnach setzt man richtig also an:

450 : 120 = 124 : Verlust des A
450 : 150 = 124 : = = B
450 : 180 = 124 : = = C

Es lassen sich aber hier die einzelnen Beiträge mit ihrer Summe auf weit kleinere Verhältnißzahlen bringen, nämlich die Verhältnisse der Zahlen 120 : 150 : 180 sind wie 4 : 5 : 6 und überdieß 4 + 5 + 6 = 15. Demnach ist der einfachere Ansatz:

15 : 4 = 124 : Verlust des A
15 : 5 = 124 : = = B
15 : 6 = 124 : = = C

und man findet, daß A 33 fl. 4 Kr., B 41 fl. 20 Kr. und C 49 fl. 36 Kr. verlieret.

3) Zwei Personen pachten eine Wiese für 25 fl., A läßt 12 Kühe, B aber nur 8 Kühe darauf weiden. Wie viel muß Jeder zum Pachtgeld zahlen? Weil die Verhältnißzahlen 12 : 8 wie 3 : 2 sind, und 3 + 2 = 5 ist, so ist

5 : 3 = 25 : Pachtgeld des A
5 : 2 = 25 : = = B

4) Ein Soldatenquartier kostet 3 Orten, welche für 33 Höfe gelten, überhaupt 112 fl. Da nun A aus 13 Höfen, B aus 12 und C aus 8 Höfen bestehet, so fragt es sich: wie viel ein jedes Dorf an den Kosten zu tragen habe? Hier ist

33 : 13 = 112 : Betrag des Dorfes A
33 : 12 = 112 : = = = B
33 : 8 = 112 : = = = C

5) Auf einem Hause haften folgende Schulden:

erstens 8500 fl., zweitens 5000 fl., drittens 3500 fl., und viertens 2000 fl. Das Haus wird auf Antrag der Gläubiger verkauft, und da es für nicht mehr als 18510 fl. erstanden wird: was bekommt ein jeder von ihnen?

6) Zu einer gewissen Unternehmung treten sechs Personen zusammen, und legen ein A 400 fl., B 700 fl., C 360 fl., D 540 fl., E 800 fl. und F 680 fl. Sie gewinnen 3816 fl. Was kommt einem Jeden nach seiner Einlage von diesem Gewinnste zu?

7) Drei Personen haben die Summe von 5832 Thalern unter sich zu theilen. Die Theile der drei Personen A, B und C sollen sich aber zu einander verhalten, wie die Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{8}$. Wie werden nun die Antheile ausfallen?

8) Die Summe von 100 fl. sollen 6 Personen A, B, C, D, E und F so unter sich theilen, daß die Theile sich zu einander verhalten, wie die Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{12}$. Wie viel wird einem Jeden zukommen?

§. 129. Die bisherigen Rechnungen setzten voraus, daß jedes Mitglied gleichlang in der Gesellschaft gewesen sei. Wenn aber Jemand seinen Beitrag noch einmal so lang stehen hat, als ein Anderer, so kann er auch noch einmal so viel Antheil fordern: kurz der Antheil eines Jeden hängt auch von der Zeit und ähnlichen Umständen ab. In solchen Fällen erhält man ein zusammengesetztes Verhältniß, nämlich die Gewinnste oder Verluste verhalten sich, wie die Produkte aus den Beiträgen in die Zeiten. Z. B. Zwei haben in einer Handlung, A 90 Thlr. 3 Monate lang, und B 120 Thlr. 2 Monate lang; sie gewinnen damit 125 Thlr. Was wird der Gewinnst eines Jeden sein? Die Verhältnißzahlen sind hier $90 \cdot 3 = 270$ und $120 \cdot 2 = 240$. Es verhält sich aber $270 : 240$ wie $9 : 8$ und $9 + 8 = 17$. Demnach ist der Ansatz:

$17 : 9 = 125$: Gewinn des A

$17 : 8 = 125$: „ „ B

A gewinnt $66\frac{3}{17}$ Thlr. und B $58\frac{14}{17}$ Thlr.

Eben so verhält es sich, wenn verschiedene Fuhren mit mehr und weniger Pferden geschehen. In diesem Falle hängt der Antheil an dem Fuhrlohne ab von dem Produkte der Fuhren in die Pferde. Z. B. Zu einem Straßenbau hat A 7 Fuhren mit 3 Pferden, und B 5 Fuhren mit 4 Pferden gethan. Ihr gemeinschaftlicher Lohn ist 24 fl. Wieviel kommt Jedem zu? Es ist 7 . 3 = 21; ferner 5 . 4 = 20, und 21 + 20 = 41. Demnach

41 : 21 = 24 : Lohn des A

41 : 20 = 24 : " " B

Hieraus ist der Antheil des A $12\frac{12}{41}$ fl. und des B $11\frac{29}{41}$ fl.

§. 130. Mit der Gesellschaftsrechnung ist die Vermischungsrechnung ganz einerlei, welche finden lehret, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen oder verlangten Menge der vermischten kömmt, wenn die Verhältnisse der einfachen gegeben sind. Hier kommt daher die verlangte Zahl der ganzen Mischung, wozu eben die einzelnen zu suchenden Theile das Ihrige beitragen, in das dritte Glied der Proportion. Z. B. wie viel Salpeter, Schwefel und Kohlen braucht man zu 100 Pfd. Schießpulver, wenn zu einem Pfund oder zu 32 Loth nöthig sind 24 Loth Salpeter, 6 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel? Die Zahlen 24, 6, 2 geben die Summe 32; demnach

32 : 24 = 100 : x und x = 75 ℔ Salp.

32 : 6 = 100 : x " " = $18\frac{3}{4}$ ℔ Kohlen

32 : 2 = 100 : x " " = $6\frac{1}{4}$ ℔ Schwfl.

§. 131. Folgende Aufgaben gehören theils zur Gesellschaftsrechnung, theils zur Vermischungsrechnung.

1) Ein Mann geräth in Konkurs; A hatte zu fordern 75 fl., B 500 fl., C 1000 fl. und D 860 fl. Nach der Inventur betrug das übrige Vermögen nur 1625 fl. Wie viel wird jeder Gläubiger bekommen?

2) In einem Dorfe sollen die dasselbe treffenden Einquartierungskosten von 25 fl. nach dem Steu=

erfuß ausgeschlagen werden. Wenn nun A mit 320 fl. in der Steuer liegt, B mit 530, C mit 175, und D mit 212 fl.; was wird ein Jeder an den 25 fl. bezahlen müssen?

3) Drei Kaufleute vereinigen sich zu einer gewissen Unternehmung, so daß A 100 Thlr. auf 2 Monate, B 150 Thlr. auf 3 Monate, und C 110 Thlr. auf 6 Monate hergibt. Mit diesem Gelde werden 655 Thlr. gewonnen; wie viel bekommt nun ein Jeder davon?

4) Drei Fuhrleute fahren Steine zu einem Baue herbei; der eine thut 28 Fuhren mit 1 Pferde, der andere 35 mit 2 Pferden, und der dritte 42 mit 3 Pferden. Sie bekommen dafür zusammen 50 fl.; wie viel wird Jeder davon erhalten?

5) Wenn zu einem Pfund Harzkütte 20 Loth Pech, 10 Loth Kolophonium, und 2 Loth Kreide genommen werden; wie viel ist von Jedem zu 40 Pfund nöthig?

6) Zu einer Metallkomposition hat man auf 3 Pfund Kupfer 1 Pfd. 12 Loth Zinn, 24 Loth Zink und 4 Loth Blei nöthig; d. h. so oft 3 Pfd. Kupfer genommen werden, eben so oft muß man 1 Pfund 12 Loth Zinn, 24 Loth Zink und 4 Loth Blei nehmen; wie viel braucht man von jedem Metall, um 12 Centner Komposition zu bekommen?

7) Drei Kaufleute haben zusammen gehandelt. A hat 200 Thlr. 7 Monate lang in der Handlung liegen, B 350 Thlr. 5 Monate lang, und C 190 Thlr. 8 Monate lang. Sie trennen sich und finden, daß sie 120 Thlr. Verlust haben. Wie viel büßt Jeder ein?

8) Vier Kaufleute haben sich zu einer Unternehmung vereiniget. Der erste nimmt daran mit 2500 fl. Antheil auf 18 Wochen; der andere schießet 4200 fl. auf 10 Wochen her; der dritte läßt seinen Antheil von 5000 fl. 9 Wochen lang gebrauchen, und der Antheil des letzten von 6800 fl. bleibet 7 Wochen stehen. Was bekommt nun ein je-

der von ihnen von dem Gewinne, welcher 3400 fl. beträget?

9) Es soll ein Centner Jagdpulver nach englischer Vorschrift verfertigt werden, wo zu 100 ℔. Salpeter 12 ℔. Schwefel und 15 ℔ Kohle genommen werden. Wie viel Salpeter, Schwefel und Kohle braucht man zu jenem verlangten Centner?

10) In Frankreich verhalten sich, zur Verfertigung des Pulvers, die Bestandtheile des Salpeters, des Schwefels und der Kohle, wie 24 : 5 : 3. Was wird von jedem dieser Bestandtheile zu 1000 Centnern nöthig sein?

11) Von drei einfachen Ingredienzien, die zur Zusammensetzung einer Arznei erforderlich sind, ist das Verhältniß unter ihnen so beschaffen, daß des ersten Dosis 6 Loth, des zweiten 10 Loth, und des dritten 4 Loth ist. Wie viel wird von einem jeden erfordert, um 12 medizinische Pfund oder 288 Loth zu verfertigen?

12) Zu einer andern Arznei ist das Mischungsverhältniß der vier Ingredienzien und zwar des ersten 5 Loth, des zweiten $3\frac{1}{2}$ Loth, des dritten $1\frac{1}{2}$ Loth und des vierten 2 Loth. Wie viel muß von jedem dieser Ingredienzien zur Arznei genommen werden, die 18 Loth wiegen soll?

§. 132. Mit der Vermischungsrechnung ist die sogenannte Alligationsrechnung verwandt, welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, daß in dieser das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst gesucht werden muß. Die Alligationsrechnung hat nämlich zur Absicht, aus den gegebenen Werthen verschiedener Theile, aus denen man eine neue Mischung machen soll, für einen gegebenen Werth der neuen Mischung das Verhältniß der zu mischenden Theile zu finden. Z. B. Ein Wirth hat zweierlei Sorten Wein, von der bessern kostet die Maaß 54 Kr.; von der geringern 40 Kr. Er will eine Mischung treffen, die einen Eimer, zu 60 Maaß gerechnet, betragen und so beschaffen sein soll, daß er die Maaß für 48 Kr. ge-

den kann. Wie viel Maaß muß er von jeder Sorte nehmen? Hier muß erst das Verhältniß der zu mischenden Theile gesucht werden. Die Regel ist folgende: der Unterschied zwischen dem mittlern Werth und dem schlechtern gibt die Verhältnißzahl der bessern Gattung; hingegen der Unterschied zwischen den bessern Werth und dem mittlern gibt die Verhältnißzahl der schlechtern Gattung. Hier ist demnach 48 — 40 = 8 die Verhältnißzahl des bessern Weines, und 54 — 48 = 6 die Verhältnißzahl des schlechtern Weines, und nun verfährt man wie in der Vermischungsrechnung. Nämlich weil 8 + 6 = 14; so ist
14 : 8 = 60 Maaß : x M. des bessern Weines
14 : 6 = 60 „ : x M. des schlechtern „
und man findet, daß man zu dieser Mischung $34\frac{2}{7}$ Maaß des bessern Weines, und $75\frac{5}{7}$ Maaß des schlechtern Weines nehmen muß.

Wenn man den Werth des bessern und schlechtern Weines, der zur Mischung genommen wird, addirt, so wird sich die nämliche Summe ergeben, als die ganz neue Mischung kostet.

Die Regel für das Verfahren in der Alligationsrechnung ist zwar aus der Algebra oder mathematischen Analysis genommen, wohin wir daher den wißbegierigen Rechner verweisen. Man vergleiche z. B. Neubigs Anfangsgründe der mathematischen Analysis ꝛc. Nürnberg 1817 §. 32. und daselbst das zweite Beispiel. Aber auch schon der denkende Geist erkennt es als recht und billig, daß hier ein umgekehrtes Verhältniß statt findet, daß nämlich die Unterschiede zwischen den Mischungsgrößen und der mittlern Größe im umgekehrten Verhältnisse mit den Werthen der zu vermischenden Dinge stehen. Denn man denke sich zwei verschiedene Weine, den einen zu 50 Kr. die Maaß, den andern zu 40 Kr. die Maaß. Wenn man diese beiden Weine zu gleichen Theilen mischt, so ist offenbar, daß die Maaß des gemischten Weines 45 Kr. werth ist. Hingegen wenn

ich die Maaß zu 48 Kr. verlange, so ist doch einleuchtend, daß jetzt bei der bessern Mischung mehr von der bessern Sorte, und weniger von der schlechtern zugemischt werde. Und je mehr sich der mittlere Preis dem Preise der bessern Sorte nähert, desto geringer wird der Unterschied. Eben so: je mehr ich mich im Preise von der schlechtern Sorte entferne, desto weniger soll von dieser zugegossen werden, und desto größer wird der Unterschied. Diese nämliche Betrachtung läßt sich aber bei allen Mischungen anstellen, und es erhellet daher die Richtigkeit, Natürlichkeit und Gerechtigkeit nach der obigen Regel: daß die Unterschiede im umgekehrten Verhältnisse mit den Werthen der zu vermischenden Dinge stehen.

Eine gute Probe dieser Rechnungsart ist es, wenn man die Preise der zu mischenden Dinge bestimmt, und dann addirt; hernach aber auch die neue Mischung nach ihrem Werthe berechnet, und vergleicht, ob gleiche Werthe oder Preise herauskommen. Z. B. von dem Weine in obiger Aufgabe kosten die $34\frac{2}{7}$ Maaß des bessern Weines 30 fl. $51\frac{3}{7}$ Kr., und die $25\frac{5}{7}$ Maaß des schlechtern Weines kosten 17 fl. $8\frac{4}{7}$ Kr. Darum ist der Eimer des gemischten Weines 30 fl. $51\frac{3}{7}$ Kr. + 17 fl. $8\frac{4}{7}$ Kr. = 48 fl. werth. Nun wurde verlangt, daß die Maaß 48 Kr. kosten soll, wovon der Eimer auch 48 . 60 Kr. = 48 fl. beträgt.

§. 133. Beispiele zur Uebung: 1) Jemand hat zweierlei Sorten Kaffee, von der bessern kostet das Pfund 1 fl. 12 Kr. und von der geringern 48 Kr. Er will eine Mischung treffen, daß er das Pfund um 54 Kr. geben kann. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

2) Jemand hat zweierlei Silber, 10 löthiges und 14 löthiges, und will $2\frac{1}{2}$ Mark (die Mark zu 16 Loth gerechnet) 13 löthiges Silber haben; wie viel muß er von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

3) Jemand hat 10 karatiges und 17 karatiges Gold; er will eine 15 karatige Mischung haben, die

$1\frac{1}{2}$ Mark (die Mark zu 24 Karaten gerechnet) wiegen soll: Wie viel Karate muß er von jeder Sorte nehmen?

4) Jemand verlangt von einem Weinhändler 10 Eimer Wein, den Eimer zu 25 fl. Dieser aber hat nur Weine zu 27 fl. und zu 20 fl. Wie viel von jeder dieser Sorten braucht er, wenn er diesen Wein mischen will, um jene 10 Eimer liefern zu können?

5) Ein Kaufmann will zweierlei Taback, den einen das Pfd. zu 50 Kr., den andern das Pfd. zu 36 Kr. mischen, so daß die Mischung 100 Pfd. beträgt, und das Pfd. 45 Kr. werth ist. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

6) Ein Landmann soll 20 Scheffel Getreide liefern, wo der Scheffel 13 Gulden werth ist. Er besitzt aber nur Getreide zu $14\frac{1}{5}$ fl. und zu $11\frac{1}{2}$ fl. an Werth. Er will daher mischen. Man fragt nun, wie viel von jeder Gattung Getreide er zur Mischung nehmen darf?

Sechstes Kapitel.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzel.

---

§. 134. Ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren heißt eine Quadratzahl oder ein Quadrat; und zwar das Quadrat derjenigen Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt das Quadrat gibt. Z. B. $5 \times 5 = 25$ ist das Quadrat der Zahl 5. Eben so ist 64 das Quadrat von 8, weil $8 \times 8 = 64$. Der einzelne Faktor, durch dessen Multiplikation mit sich selbst das Quadrat entsteht, heißt die Quadratwurzel; daher ist 5 die Quadratwurzel von 25; eben so 8 die Quadratwurzel von 64; ferner 6 die Quadratwurzel von 36.

§. 135. Es hat also gar keine Schwierigkeit, das Quadrat von jedweder Zahl anzugeben; denn man darf sie nur mit sich selbst multipliciren. Z. B. von 12 ist das Quadrat $12 \times 12 = 144$; von 217 ist das Quadrat $217 \times 217 = 47089$. Um anzugeben, daß eine Zahl zum Quadrat zu erheben sei, gebraucht man die Zahl 2, welche man oben zur Rechten der Zahl setzt. Z. B. $12^2 = 144$ heißt das Quadrat von 12 ist 144. Ferner $9^2 = 81$ bedeutet: das Quadrat von 9 ist 81.

§. 136. Von Brüchen erhält man das Quadrat, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt (wegen §. 53.). Gemischte Zahlen verwandelt man zuerst in einen uneigentlichen Bruch nach §. 50. Beispiele:

$$\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \tfrac{9}{16}$$

$$\left(\tfrac{1}{7}\right)^2 = \frac{1 \times 1}{7 \times 7} = \tfrac{1}{49}$$

$$\left(\tfrac{8}{13}\right)^2 = \frac{8 \times 8}{13 \times 13} = \tfrac{64}{169}$$

$$\left(2\tfrac{4}{5}\right)^2 = \left(\tfrac{14}{5}\right)^2 = \frac{14 \times 14}{5 \times 5} = \tfrac{196}{25}$$

§. 137. Wenn man Decimalbrüche zum Quadrate erhebt, so erscheinen die Decimalstellen im Quadrate allemal paarweise, weil sie die doppelte Anzahl der Stellen in der Quadratwurzel enthalten müssen. Z. B.

$(0{,}4)^2 = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$
$(0{,}05)^2 = 0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}0025$
$(0{,}126)^2 = 0{,}126 \times 0{,}126 = 0{,}015876$
$(0{,}032)^2 = 0{,}001024$.

§. 138. Aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen, heißt diejenige Zahl finden, welche mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl (Quadratzahl) wieder gibt. Um diese Verrichtung anzuzeigen, gebraucht man das Zeichen $\sqrt[2]{\ }$ oder einfach $\sqrt{\ }$. So bedeutet $\sqrt{64}$ soviel als: die Quadratwurzel aus

64; und $\sqrt{64} = 8$ heißt: die Quadratwurzel aus 64 ist 8.

§. 139. Um aus jeder Zahl die Quadratwurzel ziehen zu können, muß man sich zuvor mit den Quadratzahlen der neun ersten Zahlziffern bekannt machen, welche im folgenden Täfelchen enthalten sind:

Quadrat-Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81

§. 140. Aufgabe. Aus einer jeden ganzen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung. 1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen, und gebe jeder Klasse zwei Ziffern, wo dann die letzte Klasse zur Linken, d. i. die höchste, zwei oder auch nur eine Ziffer haben kann und darf.

2) Nun ziehe man von der höchsten Klasse das ihr gleiche oder zunächst kleinere Quadrat eines der neun ersten Zahlziffern im obigen Täfelchen ab, und schreibe die Wurzel davon beiseite in die sonst gewöhnliche Stelle des Quotienten.

3) Zum etwaigen Reste setze man die nächste Klasse herab, verdoppele den eben gefundenen Wurzeltheil, setze die niedrigste Ziffer davon unter die höchste der eben herabgelassenen Klasse, und dividire. Den sich ergebenden Quotienten setze man als den zweiten Wurzeltheil sowohl rechts neben den ersten Wurzeltheil, als auch neben den Divisor hin.

4) Den Divisor sammt dem beigesetzten zweiten Wurzeltheile, (die man immer einschließen kann, um sie leicht von der darüberstehenden Zahl unterscheiden zu können), multiplicire man mit dem so eben gefundenen Quotienten, als dem neuen Wurzeltheil, und ziehe das Produkt von den treffenden Ziffer-

stellen, nämlich von dem vorigen Reste und der herabgelassenen Klasse, ab.

5) Jetzo nehme man die nächste Klasse herab und setze sie zu dem etwa gebliebenen Reste, verdopple die schon gefundenen Wurzeltheile, die man zusammen als Eine Zahl betrachtet, und verfahre wieder, wie so eben (in Nro. 3 und 4) ist gelehrt worden, bis alle Klassen herabgesetzt und somit alle Wurzeltheile gefunden worden sind.

6) So oft man mit dem Zweifachen der Wurzeltheile nicht dividiren kann, indem der Divisor größer ist als der Dividend, schreibe man eine Null als den gesuchten Wurzeltheil an, setze die nächste Klasse herunter und verfahre wieder, wie schon gezeigt worden ist.

7) Wenn einmal das (nach Nro. 4.) gefundene Produkt so groß sein sollte, daß man nicht abziehen kann, so muß der Quotient oder Wurzeltheil kleiner genommen werden, so daß der Abzug geschehen kann.

8) Die Wurzel erhält allemal so viele Zifferstellen, als die Zahl, woraus man die Quadratwurzel zieht, Klassen hat. Beispiele: Man soll die Quadratwurzel aus 214369 und aus 2274064 ziehen.

21|43|69(463	2|27|40|64(1508
16	1
543	127
(86)	(25)
516	125
2769	240
(923)	(300)
2769	000
*	24064
	(3008)
	24064
	*

Man findet also $\sqrt{214369} = 463$ und $\sqrt{2274064} = 1508$.

Noch zwei andere Beispiele sind:

```
36|96|64(608
36|
------
  96
 (120)
  000
------
  9664
 (1208)
  9664
------
    *
```

```
4|02|00|25(2005
4|
------
  02
 (40)
  00
------
  200
 (400)
  000
------
  20025
 (4005)
  20025
------
    *
```

§. 141. Solche Zahlen, aus welchen die Quadratwurzel so gezogen werden kann, daß am Ende kein Rest bleibt, sind *vollständige Quadratzahlen*. Aber die wenigsten Zahlen sind von dieser Art. Bei den meisten bleibt ein Rest, und man kann für solche Zahlen die Wurzel nie vollständig, sondern nur durch Näherung finden, jedoch so genau, als es nur immer nöthig ist in der Anwendung. Dergleichen Quadratzahlen nennt man *unvollständige, unvollkommene Quadratzahlen*, und ihre Wurzeln heißen *Irrationalzahlen* d. h. solche Zahlen, die weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen vollständig dargestellt werden können. Das Verfahren, aus unvollständigen Quadratzahlen die Wurzel zu ziehen, unterliegt aber keinen neuen Regeln. Man braucht blos an den letzten Rest nach und nach so viele Paare von Nullen zu hängen, als man in der Wurzel Decimalstellen verlangt, und verfährt übrigens wie vorhin. Für jedes Paar angehängte Nullen wird dann in der Wurzel Eine Decimalstelle abgeschnitten; oder so viele Paare von Nullen man angehängt hat, so viele Decimalstellen werden in der gefundenen Wurzel abgeschnitten (§. 137.). Z. B. man soll die Quadratwurzel aus 236 ziehen. Die Rechnung sieht also aus:

```
2|36(15,36....
1|
———
 136
 (25)
 125
 ———
  1100
  (303)
   909
  ————
   19100
   (3066)
   18396
   —————
     704
```

An den letzten Rest 11 wurde zuerst ein Paar Nullen angehängt; dann an den neuen Rest 191 abermals ein Paar Nullen. Für diese zwei Paare von Nullen sind in der Wurzel zwei Decimalstellen abgeschnitten worden. Von 15 ist das Quadrat erst 225; also noch ziemlich geringer als die vorgelegte Zahl 236. Hingegen das Quadrat von 15,36 ist schon 235,9296 also gar wenig von 236 verschieden. Je weiter man aber die Wurzelziehung fortsetzt, desto genauer findet man die Wurzel selbst. — Auf gleiche Weise findet man

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$

§. 142. Die Probe besteht begreiflich darin, daß man die gefundene Wurzel mit sich selbst multiplicirt. Das Produkt muß die nämliche Zahl wiedergeben, aus der die Wurzel gezogen worden ist. Wenn am Ende ein Rest geblieben ist, so muß man diesen zu dem Produkte noch addiren, um die Quadratzahl wieder zu erhalten. Die bisherigen Beispiele können zur Uebung dienen.

§. 143. Man übe sich in der Ausziehung der Quadratwurzeln an folgenden Beispielen:

1) $\sqrt{19704721}$ gibt
2) $\sqrt{73034116}$
3) $\sqrt{104734756}$
4) $\sqrt{14408161156}$

5) $\sqrt{81144370272289}$ gibt
6) $\sqrt{260103243610124}$
7) $\sqrt{7}$
8) $\sqrt{45}$
9) $\sqrt{280}$
10) $\sqrt{638}$
11) $\sqrt{4122}$
12) $\sqrt{27071260}$

§. 144. Aufg. Aus einem Decimalbruche, ohne Ganze und mit Ganzen, die Quadratwurzel auszuziehen.

Aufl. Das Verfahren ist das nämliche, wie bei ganzen Zahlen; nur muß man (wegen §. 137.) darauf sehen, daß der Decimalbruch eine gerade Anzahl von Stellen z. B. 2, 4, 6, 8, 10 Stellen u. s. w. habe. Ist die Anzahl ungerade, so mache man sie durch eine angehängte Null gerade.

Kommen im Decimalbruche keine Ganzen vor, so erhält natürlich die Wurzel auch keine Ganzen, und alle gefundenen Ziffern sind Decimalen, und zwar soviele, als Paare oder Klassen von Decimalen in dem vorgelegten Decimalbruche vorhanden sind.

Hat aber der Decimalbruch zugleich auch Ganze, so bekommt die Wurzel so viele Ganze als die gegebene Zahl Klassen von Ganzen hat, und so viele Decimalen, als Klassen von Decimalen in der vorgelegten Zahl sich vorfinden. Z. B. Man soll die Quadratwurzel von 0,0064 angeben.

```
0,00|64(0,08
     64
   ------
      *
```

Welches ist die Quadratwurzel aus 0,013924?

```
0,01|39|24(0,118
   1|
  --------
     39
    (21)
     21
  --------
     1824
    (228)
     1824
  --------
       *
```

Welches ist die Quadratwurzel aus 61,238? — In den beiden vorigen Beispielen war die Anzahl der Decimalen gerade, nämlich in den ersten 4, in dem zweiten 6. In diesem Beispiele aber ist die Anzahl ungerade, nämlich 3; deßhalb muß noch eine Null beigefügt und daher die Wurzel aus 61,2380 gezogen werden, also:

```
61,|23|80(7,82.....
49 |
————————
 1223
 (148)
 1184
————————
  3980
 (1562)
  3124
————————
  856
```

Es ist also $\sqrt{61{,}238} = 7{,}82\ldots.$ Und da ein Rest geblieben ist, so könnte man auch die Rechnung fortsetzen, nach §. 141. Alsdann würde die Wurzel noch genauer gefunden werden, als es gegenwärtig geschehen ist.

§. 145. Aus folgenden Decimalbrüchen, ohne und mit Ganzen, suche man die Quadratwurzel.

1) $\sqrt{0{,}038416}$ gibt
2) $\sqrt{17{,}5}$
3) $\sqrt{0{,}000025}$
4) $\sqrt{256{,}3}$
5) $\sqrt{3303{,}9504}$
6) $\sqrt{9{,}6}$
7) $\sqrt{120583{,}3195061881}$
8) $\sqrt{0{,}00001205833195061881}$

§. 146. Aufg. Aus einem gemeinen Bruche oder einer gemischten Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Aufl. So wie das Quadrat eines gemeinen Bruches gefunden wird, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt (§. 136.); eben so muß umgekehrt beim Ziehen der Wurzel sowohl aus Zähler als auch aus Nenner die Wurzel

besonders gezogen werden. Gemischte Zahlen verwandelt man erst in einen uneigentlichen Bruch (nach §. 50.). Z. B.

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{24}} = \frac{2}{5}$$

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{\frac{144}{289}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{289}} = \frac{12}{17}$$

$$\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Indessen läßt sich dieses Verfahren nur da mit Bequemlichkeit anwenden, wo Zähler und Nenner vollständige Quadratzahlen sind. Sobald dieß nun der Fall nicht ist, verwandelt man besser den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und verfährt nach dem Vorhergehenden (§. 144.). Z. B.

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}} = \sqrt{0{,}416666....} = 0{,}645....$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{16}} = \sqrt{0{,}1875} = 0{,}43....$$

§. 147. Man ziehe aus folgenden Brüchen die Quadratwurzel dergestalt, daß man sie zuvor in Decimalbrüche verwandelt:

1) $\sqrt{\frac{3}{7}}$
2) $\sqrt{\frac{19}{64}}$
3) $\sqrt{\frac{75}{238}}$
4) $\sqrt{5\frac{2}{3}}$
5) $\sqrt{7\frac{5}{9}}$
6) $\sqrt{122\frac{3}{8}}$

§. 148. Ein Produkt aus drei gleichen Faktoren heißt eine **Kubikzahl** oder ein **Kubus**; und der einfache Faktor davon heißt die **Kubikwurzel**. So ist demnach 64 der Kubus von 4, weil $4 \times 4 \times 4 = 64$; und 4 ist die Kubikwurzel von 64.

Den Kubus oder die Kubikzahl bezeichnet man durch die Zahl 3, die man oben rechts neben der Zahl, die im Kubus stehen soll, schreibet. Z. B. $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ heißt: der Kubus von 5 ist 125. Eben so

$12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$
$68^3 = 314432$
$131^3 = 2248091.$

Das Zeichen für die Kubikwurzel ist $\sqrt[3]{\ }$. Nämlich $\sqrt[3]{729} = 9$ heißt: die Kubikwurzel aus 729 ist 9; ferner $\sqrt[3]{46656} = 36$ lieset man: die Kubikwurzel aus 46656 ist 36.

§. 149. Von gemeinen Brüchen erhält man auf gleiche Weise die Kubikzahlen. Z. B.

$$(\tfrac{2}{5})^3 = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \tfrac{8}{125}$$
$$(\tfrac{4}{7})^3 = \frac{4 \times 4 \times 4}{7 \times 7 \times 7} = \tfrac{64}{343}$$
$$(\tfrac{1}{8})^3 = \frac{1 \times 1 \times 1}{8 \times 8 \times 8} = \tfrac{1}{512}$$

Gemischte Zahlen müssen zuvor in einen uneigentlichen Bruch (nach §. 50.) verwandelt werden, z. B.

$$(6\tfrac{3}{4})^3 = (\tfrac{27}{4})^3 = \frac{27 \times 27 \times 27}{4 \times 4 \times 4} = \frac{19683}{64}$$

§. 150. Die Decimalbrüche enthalten im Kubus eben so viele Klassen von drei und drei Decimalstellen, als in der Wurzel einfache Decimalstellen vorhanden waren. Z. B.

$(0{,}7)^3 = 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}343$
$(0{,}02)^3 = 0{,}02 \times 0{,}02 \times 0{,}02 = 0{,}000008$
$(0{,}014)^3 = 0{,}000002744$

§. 151. Aus einer gegebenen Zahl **die Kubikwurzel ziehen**, heißt diejenige Zahl finden, welche dreimal mit sich selbst multiplicirt d. h. dreimal als Faktor im Produkte gesetzt die gegebene Zahl wieder gibt.

§. 152. Zur Kenntniß der Kubikwurzelziehung muß man die Kubusse der neun ersten Zahlen wissen, welche in folgendem Täfelchen enthalten sind:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kubusse	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 153. Aufg. Aus jeder gegebenen ganzen Zahl die Kubikwurzel zu ziehen.

Aufl. 1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von drei Ziffern, wobei die letzte zur Linken oder die höchste drei, oder zwei, oder auch nur Eine Ziffer erhalten kann.

2) Von der höchsten oder letzten Klasse zur Linken ziehe man denjenigen Kubus aus den neun ersten Zahlen in obigem Täfelchen ab, welcher ihr gleich oder zunächst kleiner ist, und schreibe die Wurzel davon an die gewöhnliche Stelle des Quotienten. Der Rest des Abzugs aber, wenn einer bleibt, wird gerade unter die höchste Klasse gesetzt.

3) Zu dem etwaigen Reste setze man die nächste Klasse herab; erhebe die bereits gefundene Wurzel zum Quadrat, und multiplicire dieses durch die Zahl 3. Unter den vorigen Rest und die neue herabgelassene Klasse setze man dieses dreifache Quadrat so, daß seine niedrigste Ziffer unter der höchsten Ziffer der neuen Klasse zu stehen komme, und dividire damit in die obenstehenden Zahlen. Der Quotient ist der zweite Theil der Wurzel. Den Divisor kann man zur leichten Unterscheidung einschließen.

4) Nun mache man folgende drei Produkte:

a) Man multiplicire mit diesem neuen Theile der Wurzel den so eben gebrauchten Divisor, und schreibe dieses Produkt gerade so unter, wie den Divisor, nämlich die niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgelassenen Klasse;

b) man nehme das Quadrat des neuen Wurzeltheils dreifachen, multiplicire es mit dem ersten Wurzeltheile, und setze dieses Produkt so unter, daß die niedrigste Ziffer unter die mittlere der herabgelassenen Klasse zu stehen kommt; endlich

c) mache man den Kubus des zweiten Wurzeltheils, dessen niedrigste Ziffer unter die niedrigste der herabgelassenen Klasse gesetzt wird.

5) Jetzt addire man die nach Nro. 4 gefundenen drei Produkte a), b) und c), und ziehe die Summe von dem Reste und der herabgelassenen Klasse ab.

6) Auf die nämliche Weise verfahre man, wenn noch mehr Klassen vorhanden sind. Nämlich man setze zu dem etwaigen Reste die folgende Klasse herab, und betrachte die bisher gefundenen Wurzeltheile immer als Einen, und setze die Rechnung weiter so fort, wie von Nro. 3 an ist gelehret worden, und zwar so lange, bis alle Klassen herabgelassen worden sind.

7) So oft der Divisor größer ist als der Dividend, und man also nicht dividiren kann, so oft muß in der Wurzel eine Null als Quotient angeschrieben, eine neue Klasse herabgesetzt, und ein neuer Divisor gesucht werden.

8) Wenn man die nach Nro. 5 gefundene Summe nicht abziehen kann, so ist dieß ein Zeichen, daß der Quotient oder neue Wurzeltheil zu groß genommen worden ist. Er muß daher vermindert werden, bis der Abzug geschehen kann.

9) Die Wurzel erhält immer so viele Zifferstellen, als die Kubikzahl Klassen hat.

Beispiele: Man soll die Kubikwurzel aus 34645976 und aus 128024064 ziehen.

34|645|976(326	128|024|064(504
27	125
7645	3024
(27)	(75)
54	3024064
36	(7500)
8	30000
5768	2400
1877976	64
(3072)	3024064
18432	*
3456	
216	
1877976	
*	

Es ist also $\sqrt[3]{34645976} = 326$ und $\sqrt[3]{128024064} = 504$.

§. 154. Bei Zahlen, welche keine vollständige Kubikzahlen sind, bleibt am Ende ein Rest, und die gefundene Wurzel ist deßhalb auch nicht ganz genau. Will man sie genauer haben, so darf man nur an den letzten Rest eine Klasse von drei Nullen anhängen, und die Rechnung auf obige Weise fortsetzen, so lange, als man es für nöthig findet. Für jede angehängte Klasse von Nullen wird in der Wurzel Eine Decimalstelle angeschrieben oder abgeschnitten. Z. B. Man soll die Kubikwurzel aus 3 ziehen; die Rechnung geschieht also:

```
3(1,442....
1
―――――――――
 2000
 (3)
 12
  48
   64
―――――――――
 1744
―――――――――
  256000
  (588)
  1352
    672
     64
―――――――――
  241984
―――――――――
   14016000
   (62208)
   124416
      1728
         8
―――――――――
   12458888
―――――――――
    1557112
```

Demnach ist $\sqrt[3]{3} = 1{,}442.....$

§. 155. Die Probe wird dadurch gemacht, daß man die gefundene Wurzel zum Kubus erhebt, und man muß die Zahl wieder erhalten, aus welcher die Kubikwurzel gezogen worden ist. Wo am Ende ein Rest geblieben ist, da muß man diesen noch zum ge-

fundenen Kubus addiren. So muß also in dem letzten Beispiele zum Kubus von 1,442.... noch der Rest 1557112 addirt werden, um gerade die Zahl 3 wieder zu erhalten.

§. 156. Man ziehe aus folgenden Zahlen die Kubikwurzel:

1) $\sqrt[3]{438976}$ gibt
2) $\sqrt[3]{29218112}$
3) $\sqrt[3]{997002999}$
4) $\sqrt[3]{128100283921}$
5) $\sqrt[3]{496981290961}$
6) $\sqrt[3]{2809612752083216}$
7) $\sqrt[3]{6}$
8) $\sqrt[3]{181}$
9) $\sqrt[3]{317}$
10) $\sqrt[3]{8912}$
11) $\sqrt[3]{23456}$
12) $\sqrt[3]{240736}$

§. 157. Aufg. Aus einem Decimalbruche, ohne Ganze oder mit Ganzen, die Kubikwurzel zu ziehen.

Aufl. Man verfährt ganz so, wie bei der Ausziehung der Wurzel aus ganzen Zahlen. Nur hat man vor Allem darauf zu sehen, daß die Decimalstellen Klassen von drei zu drei Stellen bilden (wegen §. 150). Wo dieß der Fall noch nicht ist, da muß man die Stellen durch angehängte Nullen am Ende ergänzen. Die Wurzel erhält so viele einzelne Ganze und Decimalen, als in der vorgelegten Kubikzahl Klassen von beiden vorhanden sind. Z. B. Wenn man die Kubikwurzel aus 14,8 ziehen soll, so muß man erst noch zwei Nullen anhängen; dann erhält man in der Wurzel Eine Decimalstelle; und

will man zwei Stellen haben, so muß man noch eine neue Klasse von Nullen d. i. noch drei Nullen anhängen.

```
14,|800(2,45....
 8 |
------
 6800
(12)
 48
  96
   64
------
 5824
------
  976000
 (1728)
  8640
   1800
    125
-------
 882125
-------
  93875
```

```
0,|000|314|432(0,068
         216
     -------
       98432
      (108)
       864
       1152
         512
     -------
       98432
     -------
           *
```

Demnach ist

$\sqrt[3]{0,000314432} = 0,068$

§. 158. Man ziehe nun noch aus folgenden Decimalbrüchen, mit und ohne Ganze, die Kubikwurzel; nämlich

1) $\sqrt[3]{12,167}$
2) $\sqrt[3]{3,45}$
3) $\sqrt[3]{1771,501}$
4) $\sqrt[3]{64,969656240601}$
5) $\sqrt[3]{0,003148}$
6) $\sqrt[3]{0,00741}$
7) $\sqrt[3]{0,4163255}$
8) $\sqrt[3]{0,2584}$

§. 159. Aufg. Aus einem gemeinen Bruche oder einer gemischten Zahl die Kubikwurzel auszuziehen.

Aufl. Man ziehe aus Zähler und Nenner die Wurzel besonders (wegen §. 149). Aber gemischte Zahlen müssen zuvor in uneigentliche Brüche verwandelt werden (§. 50.). Z. B.

$$1)\ \sqrt[3]{\frac{125}{729}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{5}{9}.$$

$$2)\ \sqrt[3]{\frac{512}{4913}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{4913}} = \frac{8}{17}$$

$$3)\ \sqrt[3]{11\frac{25}{64}} = \sqrt[3]{\frac{729}{64}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{9}{4} = 2\tfrac{1}{4}$$

Aber nur höchst selten ereignet es sich, daß Zähler und Nenner vollständige Kubikzahlen sind. Im entgegengesetzten Falle thut man wohl allemal besser, den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, und nach §. 157 zu verfahren. Z. B.

$$\sqrt[3]{\tfrac{7}{9}} = \sqrt[3]{0{,}777777\ldots} = 0{,}91\ldots\ldots$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} = \sqrt[3]{0{,}666666666\ldots} = 0{,}873\ldots$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}} = \sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}908\ldots\ldots$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{5}{8}} = \sqrt[3]{0{,}625} = 0{,}854\ldots$$

$$\sqrt[3]{4\tfrac{3}{8}} = \sqrt[3]{4{,}375} = 1{,}63\ldots$$

$$\sqrt[3]{28\tfrac{3}{5}} = \sqrt[3]{28{,}6} = 3{,}0581\ldots$$

§. 160. Anmerkung. Die Gründe für das Verfahren bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel sind hier weggelassen worden, weil dieselben ohne Kenntniß der Buchstabenrechnung nur sehr weitläuftig und doch nicht deutlich genug vorgetragen

werden können. Könnte der Lehrer den Zöglingen nur soviel begreiflich machen, daß $(a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, und daß $(a+b) \times (a+b) \times (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sei: so wäre wenigstens der Schlüssel zur Einsicht der Regeln für die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel gegeben. Dieselbe Bewandtniß hat es mit der Alligationsrechnung. Vgl. oben zu §. 132. Darum lasse sich der wißbegierige Liebhaber der edlen Rechenkunst begeistern, wenigstens noch einige Schritte über diese Anweisung hinaus auf das Feld der Buchstabenrechnung zu thun. Selbst der künftige Kaufmann wird sich für diese kleine Mühe reichlich belohnet finden!

Siebentes Kapitel.

Vermischte Aufgaben,

welche das Nachdenken der jungen Freunde der Rechenkunst besonders in Anspruch nehmen.

---

1) In das hinterlassene Vermögen eines Vaters theilen sich 6 Kinder so, daß das ältere immer 25 Gulden weniger bekommt als das nächst jüngere. Das Vermögen beträgt 12525 fl. Wie viel erhält jedes Kind von dem ältesten an bis zum jüngsten?

2) Ein Meister, 12 Gesellen und 4 Handlanger haben für eine gewisse Zeit, die sie arbeiteten, der Meister täglich 1 Thaler, der Geselle 16 Groschen und der Handlanger 10 Groschen, überhaupt aber 170 Thaler 16 Groschen ausbezahlt erhalten. Wie viel Tage haben sie dafür gearbeitet?

3) Ein Fleischer verdingt 16 Ochsen auf 12 Monate Zeit in die Fütterung. Nach 3 Monaten schickt er noch 8 Ochsen, und, nachdem diese wiederum $3\frac{1}{3}$ Monate gezehrt haben, noch 6 Ochsen. Wie lange werden sämmtliche Ochsen für das nämliche bedungene Geld gefüttert werden müssen?

4) In wie viel Tagen können 3 Personen zusammen eine Arbeit vollenden, wozu die erste allein 24 Tage, die zweite 21 Tage und die dritte 18 Tage brauchen würde?

5) Eine Arbeit wird durch 6 Mann in 50 Tagen fertig. Nach 13 Tagen kommen noch 4 Mann dazu, und diese 10 Mann arbeiten zusammen 5 Tage; dann kommen noch 8 Mann dazu. Wie lange müssen diese 18 Mann zusammen noch arbeiten?

6) Einem Boten, der schon vor 13 Tagen abgegangen ist und täglich 5 Meilen zurück legt, wird aus dem nämlichen Orte ein zweiter nachgesandt, der täglich 4 Meilen mehr zurück legt. In wie viel Tagen wird er den ersten einholen?

7) Aus einem gewissen Orte wird ein Eilbote abgeschickt, der alle 5 Stunden 7 Meilen macht. 8 Stunden nach seiner Abreise wird ihm ein anderer nachgeschickt, welcher, um jenen einzuholen, alle 3 Stunden 5 Meilen machen muß. In wie viel Stunden wird er ihn einholen?

8) Aus einem Orte A zieht ein Heerhaufen geraden Weges nach einem andern Orte B, und macht täglich $4\frac{1}{3}$ Meilen. Aus dem Orte B zieht 12 Tage darauf ein anderer Heerhaufen geraden Weges nach dem Orte A, und macht täglich 5 Meilen. Beide Oerter liegen 120 Meilen weit von einander. Es ist daher die Frage: den wie vielsten Tag nach dem Ausrücken des ersten Heerhaufens beide Heerhaufen zusammen treffen werden?

9) In ein Wasserbehältniß, welches 40 Maaß

faßt, laufen 4 Röhren. Die erste füllt, wenn sie allein läuft, das Behältniß in 15 Minuten; die zweite in 30 Minuten; die dritte in 45 Minuten, und die vierte in 1 Stunde, unter gleicher Voraussetzung, daß sie allein laufen. In welcher Zeit wird das Behältniß gefüllt werden, wenn man alle 4 Röhren zugleich laufen läßt?

10) Vater und Sohn sind mit einander 54 Jahre alt; Enkel und Großvater 85 Jahre; Vater und Großvater 109 Jahre. Wie alt ist ein Jeder?

11) In 2 Geldbeuteln befinden sich zusammen 200 Gulden. Wenn man aus dem ersten 20 Gulden heraus nimmt und legt sie in den zweiten, so ist in beiden gleichviel. Wie viel enthält ein jeder?

12) In einem Lande sollen 4 Kreise A, B, C und D zu einem bevorstehenden Kriege ihre Mannschaft von 6000 Mann stellen. Die Vertheilung soll nach dem Verhältnisse ihrer Volksmenge geschehen. Nun verhält sich die Volksmenge von A zur Volksmenge von B, wie 5 zu 6; die Volksmenge von B zur Volksmenge von C, wie 9 zu 8; die Volksmenge von C zur Volksmenge von D, wie 14 zu 15. Es ist daher die Frage: wie viel Mann jeder Kreis zu stellen hat?

13) In eine Verlassenschaft haben sich 6 Erben getheilt. A hat nach Verhältniß $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$, C $\frac{1}{6}$, D $\frac{1}{7}$, E $\frac{1}{8}$ und F 200 Gulden davon erhalten. Man fragt: 1) wie viel jeder der fünf ersten Erben bekommen hat, und 2) wie groß die ganze Erbschaft gewesen ist?

14) Zu einem gewissen Unternehmen traten 4 Personen zusammen, und legten verschiedene Kapitalien ein, dergestalt, daß sie unter sich einig wurden, den Gewinn oder Verlust nach dem Verhältniß ihrer Einlagen zu vertheilen. Daraus ergab sich, daß A noch einmal so viel als B, und C so viel als A und B mit einander; D aber um ein Viertheil mehr als B gewinnen oder verlieren soll. Sie hatten nun einen Verlust von 1200 fl. Was verliert demnach ein Jeder?

Anhang von nützlichen Tabellen.

I. Tabelle.

Münzen.

Länder und Städte.	Arten der Münzen.	Münzfuß auf eine kölnische Mark fein Silber.
Baiern . .	1 fl. zu 60 Kr., 1 Kr. zu 4 Pf.	24 fl. oder 16 Thlr.;
	1 Speciesthaler zu 2 fl. 24 Kr.	oder 10 Speciesthlr.
	1 Kronenthaler zu 2 fl. 42 Kr.	
Dänemark .	1 Thlr. zu 16 Schilling, oder	$9\frac{1}{4}$ Thlr. Spec. od. $11\frac{1}{2}$ Thlr. Kurr.
	1 Thlr. zu 6 Mark; 1 Mark zu 16 Schll.	
England	1 Pfund Sterling zu 20 Schilling.	$42\frac{1}{2}$ Schilling Sterling.
	1 Schill. zu 12 Pf. Deniers od. Penc.	
Frankreich	1 Frank zu 10 Decimen oder zu 100 Centimen.	$51\frac{93}{100}$ Franken; od.
	1 Livre zu 20 Sols.	$52\frac{88}{100}$ Livres.
Hamburg	1 Mark zu 16 Schill.	$11\frac{1}{3}$ Thlr. Kurrent.
	1 Schilling zu 12 Pf. lübeckl.	
	1 Thl. zu 3 Mark, 1 Mark zu 8 Schill. vlämisch. } Banko.	$9\frac{5}{21}$ Thlr. Banko.
Hannover	1 Thaler zu 36 Margr. oder	$12\frac{2}{3}$ Thlr. Kasseng. od. $13\frac{1}{3}$ Thl. Gold-Val.
	1 Thl. zu 24 gute Gr.	

Länder und Städte.	Arten der Münzen.	Münzfuß auf eine köllnische Mark fein Silber.
Hessen .	1 Thlr. zu 32 Albus. 1 Albus zu 9 Pf.	$13\frac{1}{3}$ Thl. Konv. Kurr.
Holland .	1 fl. zu 20 Stüver. 1 Stüver zu 16 Pf. Kurrent.	$24\frac{3}{8}$ fl. Kurrent oder
	5 fl. sind 2 Thlr. Kurrent od. Bko.	$23\frac{1}{4}$ fl. Banko.
Lübeck . .	1 Mark zu 16 Schilling.	$11\frac{1}{3}$ Thlr. oder 14 Mark Kurrent.
	1 Schill. zu 12 Pf.	
Neapel .	1 Dukati di Regno zu 100 Grain.	$12\frac{328}{1000}$ Duk. di Regno.
Oestreich	1 fl. zu 60 Kr.; 1 Kr. zu 4 Pf.	20 fl. od. $13\frac{1}{8}$ Thlr. Konv. Kurr.
Preußen .	1 Thlr. zu 24 Gr.; 1 Gr. zu 12 Pf. Kurrent.	14 Thlr. Kurr.
	1 Thl. zu 30 Silbgr.; 1 Silbgr. zu 12 Pf. Scheidem.	
Riga . .	1 Albusthlr. zu 3 fl. 80 Fardinge oder zu 90 Albusgr.	$9\frac{3}{5}$ Albusthlr.
Rostock .	1 Thl. zu 3 Mark od. zu 48 Schill.	$11\frac{1}{3}$ Thlr. oder 24 Mark.
Rußland .	1 Silberrubel zu 100 Kopeken.	13 Silb. Rub. oder $25\frac{3}{5}$ Kupf. Rub.
Sachsen .	1 Thl. zu 24 Gr.; 1 Gr. zu 12 Pfennig.	$13\frac{1}{3}$ Thlr. Konv.-Kurrent.
Schweden	1 Thl. zu 48 Schill.	$9\frac{3}{32}$ Thlr. Spec.
Spanien	Real de plata ant. zu 34 Maravedis.	$102\frac{4}{5}$ Real de plata ant.
	1 Species Silber-Piaster zu 20 Reales de Bellon.	
	17 Reales oder Ma-	

Länder und Städte.	Arten der Münzen.	Münzfuß auf eine köllnische Mark fein Silber.
	ravedis sind 32 Reales oder Maravedis de Vellon.	
Türkei .	1 Piaster zu 40 Paros.	26½ Piaster.
Würtemberg .	1 fl. zu 60 Kr.; 1 Kr. zu 4 Pf.	24 fl. od. 16 Thlr.

II. Tabelle.

Fuße und Ellen.

Länder und Städte.	Fuße in pariser oder französ. Linien.	Ellen in pariser Linien.
Altona. . .	127	254
Amsterdam.	125,5	306
Ansbach. . .	132,92	276,78
Augsburg. .	131,3	gr. 270,2 kl. 262,6
Baireuth. .	Landf. 132,9	266,2
Baiern. . .	129,38	370,16 369,27
Berlin. . .	139,13	295,65
Braunschweig	126,5	253
Dänemark .	139	278,3
Danzig. . .	127,2	254,4
England. .	134,7	506,9
Frankfurt am Main. . .	125,3	242,6
Frankreich. .	144	526,83
Hamburg. .	127	254
Hannover. .	129,4	258,8
Holland. . .	125,5	306
Leipzig. . .	125,3	250,6
Lübeck. . .	129	255,8
Neapel. . .	116,5	936,6
Nürnberg. .	134,88	291,08
Oestreich. .	140,13	345,42
Regensburg.	139	359,083
Rheinländischer. . .	139,13	
Rom. . . .	130,6	887,3
Rußland. .	135	315,4
Sachsen. . .	125,3	256,6
Schlesien. .	127,6	255,3
Schweden. .	131,6	263,2
Spanien. .	125,3	370,16
Würtemberg.	127	272,28

III. Tabelle.

Meilenmaaß.

Länder und Städte.	Eine Meile hält pariser Fuß	Auf einen Meridiangrad gehen
Bairische . . .	22826,6	14,9847
Böhmische . .	22012,7	16,0813
Englische . .	4963,23	68,9167
Französische .	13681,97	25
Holländische .	18055,12	18,9447
Italienische .	5717,13	59,82881
Oestreichische .	23355	14,6456
Portugiesische	19057,44	17,9483
Preußische . . .	23873,76	14,3272
Römische, alte, zu 8 Stadien .	4537	75,391
Russische Werste, von denen 7 auf 1 teutsche Meile gehen . . .	3288,2	104,0265
Sächsische . .	27912	12,255
Schwäbische .	28587	11,9652
Schwedische .	32953,5	10,38008
Schweizerische	25795,25	13,2608
Spanische . .	12882	26,5546
Teutsche . . .	22803,29	15
Türkische . . .	5144,94	66,4827
Ungarische . .	25734,35	13,2912

IV. Tabelle.

Getreidemaaß.

Länder und Städte.	Namen der Maaße.	enthält pariser Kubikzoll
Altona . . .	Scheffel . . .	5312
Amsterdam . .	Sack zu 3 Scheff.	4087
Ansbach . . .	Simra zu 16 Metzen	17043
Antwerpen . .	Viertel	3867,5
Augsburg . .	Schaff zu 8 Metzen	10346
Bamberg . . .	Simra	3948,4
Baireuth . . .	Simra zu 16 Metzen	17043
Baiern . . .	Scheffel zu 6 Metzen	11209,6
Berlin.	Scheffel	2770,7
Braunschweig .	Scheff. zu 10 Himten	15650
Bremen . . .	Scheffel . . .	3585,6
Dänemark . .	Tonne	7013
Danzig . . .	Scheffel . . .	2597,4
England . . .	Quarter . . .	14408
	Bushel . . .	1801
Frankfurt a. M.	Malter zu 4 Simmer	5784
Frankreich . .	Boisseau . .	656
	Kiliolitre . .	50412,4
	Hectolitre . .	5041,24
	Decalitre . .	504,124
	Litre . . .	50,4124
Hamburg . .	Scheffel zu 2 Faß	5312
Hannover . .	Malter zu 6 Himten	9408
Hessen-Darmstadt	Simmer z. 4 Kumpfen	6452,6
Hessen-Kassel . .	Scheffel . . .	4045
Holland . . .	Sack zu 3 Scheffel.	4087
Königsberg .	alter Scheffel .	2514
	neuer : : . .	2673
Lübeck	Roggen-Scheffel	1684
	Hafer : :	1978
Neapel . . .	Tomolo . . .	2579
Nürnberg . .	Simra zu 16 Metzen	16273

Länder und Städte.	Namen der Maaße.	enthält pariser Kubikzoll
Oestreich . . .	Metze	3100
Preußen . . .	Scheffel . . .	2770,7
Riga	Lof	3285
Rußland . . .	Tschetwet zu 8 Tschetwerik . . .	9808
Sachsen . . .	Scheffel . . .	5416
Schweden . .	Tonne	8310
Spanien . .	Fanega . . .	2881
Türkei	Kislo	1770
Würtemberg .	Scheffel . . .	10542

V. Tabelle.

Gewicht.

Länder und Städte.	Namen des Gewichts.	Ein solches hat köllnische Richtpfennige	Ein solches hat holländische Asse
Amsterdam	Pfd. Handelsgew.	138509	10280
	Mark Troygew.	68985	5120
Ansbach	Pfund . . .	142821	10600
Augsburg	schweres Pfund	137706,5	10220
	leichtes —	132527	9836
Baiern	Pfund . . .	157402	11682,26
Baireuth	Pfund . . .	142928	10621
England	Pfd. Avoiz du poids oder Handelsgew.	127205	9439
	Pfd. Troygew.	104636	7766
Frankfurt a. Main	schweres Pfund.	142753	10516
	leichtes —	130964	9746
Frankreich.	altes Markgew.	137180,1	10188
	Kilogramme	280242	20812,5
	Gramme	280,242	20,8125
Hamburg	Pfund . . .	135814	10080
Holland	Mark . . .	68985	5120
Kölln	Mark . . .	65536	4863,9 nach Andern 4867,4
Nürnberg	Pfund . . .	142821	10621
Preußen	Pfund . . .	131328	9746
Regensburg	Pfund . . .	158880	11792
Sachsen	Pfund . . .	130909	9729
Wien	Pfund . . .	157040	11656
Würtemberg	Pfund . . .	131072	9736

VI. Tabelle
über
das neufranzösische Maaß und Gewicht.

Die Grundeinheit des Längenmaaßes heißt Mètre, und ist der zehnmillionte Theil vom vierten Theil eines durch Frankreich gehenden Erdmeridians. Alle Abtheilungen dieses Maaßes sind zehnfach, und zwar zehnfach größer oder zehnfach kleiner. Es heißt das natürliche Maaß, weil es sich auf die wirkliche Größe unserer Erdkugel gründet. In Vergleichung mit dem alten französischen Maaße ist ein

Mètre = 3,078444 pariser Fuß oder
= 3 Fuß, 0 Zoll, 11,2959 Linien.
= 443,2959 paris. Linien.
Décamètre = 10 Mètres = 30,78444 Fuß.
Kilomètre = 100 Mètres = 307,8444 Fuß.
Myriamètre = 1000 Mètres = 3078,444 Fuß.
Decimètre = 0,1 Mètre = 44,32959 Linien.
Centimètre = 0,01 Mètre = 4,432959 Linien.
Millimètre = 0,001 Mètre = 0,4432959 Linien.

Dagegen ist ein alter pariser Fuß = 324,839 Millimètre; 1 paris. Zoll = 27,069 Millimètre, und 1 Linie = 2,255 Millimètre.

Die Einheit des Flächenmaaßes ist das Quadrat des Mètre (Mètre carré) und beträgt 9,476817461136 paris. Quadratfuß. Are ist = 100 Quad. Mètres = 947,6817461136 par. Quadratfuß. Are ist die Einheit für das Feldmaaß, dessen zehnfaches Hectare ist, und ohngefähr unsern Morgen bezeichnet.

Die Einheit des Kubik- oder Körpermaaßes heißt Litre, und es ist ein

Litre = 50,412416 par. Kubikzoll.
Decalitre = 10 Litres = 504,12416 Kbz.
Decilitre = 0,1 Litre — 5,0412416 Kbz.

Der Kubus des Mètre (Mètre cube) wird

als Holzmaaß Stère genannt und ist = 29,17385185 paris. Kubikfuß.

Die Einheit des Gewichts heißt Gramme, und es ist nach Guyton ein

Gramme	= 281,0156	köllnischen	Richtpfennigen.
Decagramme	= 2810,156	=	=
Hectogramme	= 28101,56	=	=
Kilogramme	= 281015,6	=	=
Myriagramme	= 2810156	=	=
Decigramme	= 28,10156	=	=
Centigramme	= 2,810156	=	=
Milligramme	= 0,281056	=	=

Bei dem Verleger dieses Buches, Carl Heyder in Erlangen, wie in allen Buchhandlungen Deutschlands und benachbarter Länder, sind nachfolgende höchst gemeinnützige und äusserst wohlfeile Schulschriften zu haben, die der Wahrheit gemäß allen Schulen sehr empfohlen zu werden verdienen:

Neue Fragen an Kinder, die man im Denken und richtigen Sprechen üben will. Ein Hülfsbuch für Lehrer. Von Dr. Joh. Paul Pöhlmann. 8 gr. od. 36 kr.

Die Fibel, zum Gebrauch bei den ersten Leseübungen in Schulen. 15te verb. Aufl. 8. gebunden. Drei Pfennig oder einen Kreuzer.

Kleines neues Lesebuch für Schulen aller Confessionen. 12te verb. Aufl. 48 Seiten. 8. gebunden. 1 gr. oder 4 kr.

Die Handfibel, oder neues Buchstabier- und Lesebuch. Zum Gebrauch in Schulen aller Confessionen. 15te verb. und verm. Aufl. Auf starkes Schreibpapier gedruckt. 64 Seiten stark. 8. 2 1/4 gr. oder 9 kr.

Allgemeines Liederbuch für Schulen. 3te verb. Aufl. 18 Bogen oder 260 Seiten stark. 8. 3 gr. oder 12 kr.

Einhundert und sechs und dreyßig biblische Historien, von Dr. G. Fr. Seiler. 2 Bände. 40 Bogen stark. 13te verb. und verm. Aufl. 8. 8 gr. oder 36 kr.

Geschichte der christlichen Religion. Für Schulen und zum Privatgebrauch, herausgegeben von Dr. G. Fr. Seiler. 10te verb. Aufl. Mit 2 Karten, einem Grundriß der Stadt Jerusalem und 7 Kupfertafeln. 23 Bogen oder 384 Seiten stark, gebunden. 8. 18 gr. oder 1 fl. 24 kr.

Die biblische Religion und Glückseligkeitslehre. Beide zur Unterweisung in Schulen, wie zur eigenen Andachtsübung. Her-

ausgegeben von Dr. G. Fr. Seiler. Mit einem Kupfer: Jesus als Kind im Tempel vorstellend. 4te Aufl. gr. 8. geheft. 24 Bogen oder 322 Seiten stark. 9 gr. oder 42 kr.

Biblischer Katechismus, oder Haupt-Grundsätze der christl. Glaubens- und Sittenlehre, nebst dem kleinen Katechismus Lutheri. Zum Gebrauch in Schulen. Herausg. von Dr. G. Fr. Seiler. 8te verb. Aufl. 10 Bogen oder 128 Seiten stark. 8. 4 gr. od. 18 kr.

Gespräche von Gott und Jesu. Eine Anleitung, Kinder über die allgemeinen Grundwahrheiten der christl. Religion frühzeitig nachdenken zu lehren, herausgegeben von Dr. G. Fr. Seiler. 2te verb. und verm. Aufl. 14 Bogen oder 208 Seiten stark. 8. 6 gr. oder 27 kr.

Gebete für Stadt- und Landschulen, von Dr. G. Fr. Seiler. 72 Seiten stark. 8. 3 gr. oder 12 kr.

Festfragen, eine Beilage zu einem jeden Katechismus, von Dr. G. Fr. Seiler. 12te Aufl. 47 Seiten. 8. 1 1/2 gr. oder 6 kr.

Sittenlehren und Klugheitsregeln für Knaben und Mädchen. Zum Schul- und Privatgebrauch von Dr. G. Fr. Seiler. 18te Aufl. 6 Bogen oder 85 Seiten stark. 8. gebunden. 3 gr. oder 12 kr.

Der kleinste Katechismus für die Kleinen. Zur Anregung sittlich religiöser Gefühle. Für Kinder von etwa 5 bis 7 Jahren. Zur Vorbereitung auf jeden andern Katechismus, von Dr. G. Fr. Seiler. 4te Aufl. 68 Seiten stark. 2 1/4 gr. oder 9 kr.

Spruchbüchlein zur Erleichterung des Lernens der bibl. Stellen, welche zur christl. Glaubens- und Sittenlehre gehören, in eine solche Ordnung gestellt, daß sie zum Unterricht der Jugend bei jedem Lesebuch leicht gefunden und gebraucht werden können, von Dr. G. Fr. Seiler. 4te Auflage. 36 Seiten stark. 1 1/2 gr. oder 6 kr.

Vaterlandskatechismus der Teutschen von Dr. Joh. Lorenz Fr. Richter. 13 Bogen oder 209 Seiten stark. 8. gebunden 4 gr. oder 18 kr.

Anweisung zum Gebrauch der Bibel in Volksschulen, oder die Schullehrerbibel des Alten und Neuen Testaments in 7 Bänden, mit einer Charte. Herausgegeben von Dr. G. Fr. Seiler. 5te verb. Aufl. 8. 2 Thlr. 15 gr. oder 4 fl. 48 kr.

Lehrgebäude der evangelischen Glaubens- und Sittenlehre. Beides sowohl zum Unterricht der Jugend, als zur erbaulichen Wiederholung der Religionswahrheiten für den gemeinen Mann, von Dr. G. Fr. Seiler. 8te verb. Aufl. 16 Bogen oder 244 Seiten stark. 8. 8 gr. oder 36 kr.

Ueber das wahre thätige Christenthum, nebst mehreren Gebeten und Kommunionandachten, von Dr. G. Fr. Seiler. 4te Aufl. 8 Bogen oder 114 Seiten stark. 8. 4 gr. oder 18 kr.

Die Religion in Liedern, von Dr. G. Fr. Seiler. 7te verb. Aufl. 90 Seiten stark. 8. 2 1/4 gr. oder 9 kr.

Kleine christliche Kirchen- und Reformationsgeschichte, nebst der augsburgischen Confession wesentlichen Inhalts, von Dr. G.

Fr. Seiler. 3te Aufl. 60 Seiten stark. 8. Preiß 2 1/4 gr. oder 9 kr.

An Eltern und Lehrer. Einige Worte über die Pflicht und rechte Art des frühen Religionsunterrichtes der Kinder, von Dr. G. Fr. Seiler. 8. 56 Seiten stark. 1 gr. oder 4 kr.

Löhrs Vorschriften aus der Naturgeschichte, Erdbeschreibung, Himmelskunde und andern nöthigen und nützlichen Kenntnissen, mit 2 Bogen Text und 16 Vorlegeblättern. 2te umgearb. und verb. Aufl. 6 gr. oder 27 kr.

Geist und Kraft der Bibel für die Jugend zum Gebrauch in Schulen. Auch vielleicht für Erwachsene zur Wiederholung der biblischen Religions- und Sittenlehre. Von Dr. G. Fr. Seiler, in 2 Bänden. 8. 18 gr. od. 1 fl. 24 kr.

Ueber die Unterweisung der Katechumenen, zur Vervollkommnung und Erleichterung derselben. Einige Vorschläge von Dr. G. Fr. Seiler. 8. 32 Seiten stark. 1 1/4 gr. od. 6 kr.

Schulmethodenbuch. Zur Erleichterung und Leitung der Schulaufsicht sowohl, als zur Unterweisung für künftige Schullehrer, von Dr. G. Fr. Seiler. 8. 2te sehr vermehrte und verbesserte Aufl. 12 Bogen oder 170 Seiten stark. 6 gr. oder 27 kr.

Katechetisches Methodenbuch, von Dr. G. Fr. Seiler. 12te verb. und sehr vermehrte Aufl. 32 Bogen oder 500 Seiten stark. Preiß 18 gr. oder 1 fl. 24 kr.

Klingers Karte von Deutschland, Europa und den beiden Halbkugeln der Erde; mit mehreren astronomischen Zeichnungen zur Kenntniß des Himmels und des Weltgebäudes. Diese Karten sind zum Behuf für Schulen bestimmt, und in groß Regalfolio mit deutscher Schrift (nicht aber wie andere Karten mit lateinischen Lettern) gestochen, und entsprechen ganz dem Zweck, für den sie bestimmt sind, nehmlich den Unterricht der Geographie in Schulen zu erleichtern. Das Stück kostet 6 gr. oder 27 kr.

Lehrer und Schulvorsteher, welche von diesen (hier in diesem Buche angezeigten verschiedenen) Büchern das eine oder andere in ihren Schulen einzuführen wünschen, erhalten, wenn sie 25 Exemplare bei einer direkten Bestellung auf einmahl nehmen, nicht nur jedes Exemplar um einen vierten Theil des bemerkten Ladenpreises billiger, sondern es sollen auch jedesmahl einige Freiexemplare für fleißige und arme Schüler beigelegt werden.

Schinne

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Neubig, Andreas

Gründliche Anweisung zur Rechenkunst

Erlangen 1823

Math.p. 373 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082471-1